СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ*

В этом мемуаре излагаются новые результаты по аддитивной теории простых чисел, начала которой положил академик И. М. Виноградов и развивал автор. Работы Виноградова, проложившие новые пути, воспроизведены с упрощениями и видоизменениями в главах V и VI. Для чтения мемуара не требуется никаких предварительных знаний, за исключением одной теоремы, принадлежащей Siegel и Walfish.

Бо́льшая часть мемуара представляет собой систематическое изложение результатов, полученных автором и публикуемых впервые.

Автор едва ли мог бы преувеличить, в какой мере он обязан академику Виноградову.

Помощь в подготовке рукописи оказали г-н Чжун и г-н Мин.

В заключение автор хотел бы выразить свою горячую благодарность Академии Наук СССР за благоприятную оценку его труда. В эти тяжелые дни нам особенно придает бодрость то, что плоды наших научных исследований удостаиваются одобрения со стороны высоких академических авторитетов самого дружественного народа. Такое культурное сотрудничество ценно всегда, а в настоящий момент оно приобретает особенное значение. Пусть опубликование этого мемуара послужит укреплению истинной дружбы и взаимной доброжелательности между двумя великими народами.

Хуа Ло-Кен

18 февраля 1941 г.

Национальный университет Цзин-Хуа
г. Куньмин, Китай

После нескольких лет войны академик И. М. Виноградов любезно предоставил мне возможность посетить СССР. С большим удовлетворением я узнал, что мой мемуар, написанный в 1940—1941 гг., находится в печати. В 1942 г. академик Виноградов уточнил свой метод, о чем автор до своего приезда в Москву совсем не знал. Его уточнение усиливает теорему о среднем значении (теорему 7 мемуара). Посредством этой теоремы мы можем улучшить теоремы 8, 9, 11, 13, 17 и др. Например, теорема 11 верна для $s \geqslant 10k^2 \log k$, а теорема 13 справедлива при $s \geqslant s_0 \sim 4k \log k$ и т. д.

В заключение я должен выразить свою признательность профессору Б. И. Сегалу и Д. А. Василькову за перевод этого мемуара.

Хуа Ло-Кен

17 апреля 1946 г., Москва

---

* Примечание редакции. Эта работа поступила в редакцию Трудов Математического института в 1941 г., но в связи с условиями военного времени 1941—1945 гг., публикуется только сейчас.

ПОЯСНЕНИЯ

Общего введения к мемуару нет. Результаты резюмированы в первых параграфах соответствующих глав. Всюду в работе используются следующие обозначения:

При z вещественном $[z]$ означает наибольшее целое число $\leqslant z$, а $\{z\}$ — расстояние от z до ближайшего целого числа.

$$e(z) = e^{2\pi i z}.$$

k означает целое число; P — большое целое число, а $L = \log P$.

$C(a, b, \ldots, g)$ означает некоторое положительное число, зависящее от $a, b, \ldots, g$; ε — произвольно малое положительное число, не обязательно каждый раз одно и то же.

$f(x) = O(\varphi(x))$, или $f(x) \ll \varphi(x)$ означает, что

$$|f(x)| \leqslant C(a, b, \ldots, g)\,\varphi(x).$$

Формулируя теоремы, мы не пользуемся символом O. В доказательстве константа в символе O (или $\ll$) зависит от постоянных, заключающихся в формулировке соответствующей теоремы.

ГЛАВА I

Тригонометрические суммы*

1. Формулировка теоремы и основной леммы

Теорема 1. Пусть $f(x)$ полином k-ой степени с целыми коэффициентами:

$$f(x)=a_k x^k+\cdots+a_1 x+a_0.$$

Если $(a_k,\ldots,a_1,q)=1$, то

$$\left|\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i\frac{f(x)}{q}}\right|\leqslant c_1(k,\varepsilon)\,q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon},$$

где ε — произвольно малое положительное число.

Для краткости мы пишем

$$\alpha=\frac{1}{k},\quad e_q(x)=e^{2\pi i\frac{x}{q}}$$

и

$$S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q} e_q(f(x)).$$

Основная лемма (лемма 1.1). Если $p\nmid(a_k,\ldots,a_1)$, то

$$|S(p^l,f(x))|\leqslant c_2(k)\,p^{l(1-\alpha)}.$$

2. Вывод теоремы из основной леммы

Лемма 1.2. Пусть $\nu(q)$ означает число различных простых множителей q и $d(q)$ — число положительных делителей q. Тогда

$$2^{\nu(q)}\leqslant d(q)\leqslant c_3(\varepsilon)\,q^{\varepsilon}.$$

Доказательство. Если простое число $p>2^{\frac{1}{\varepsilon}}$, то

$$\frac{d(p^l)}{p^{l\varepsilon}}=\frac{l+1}{p^{l\varepsilon}}\leqslant\frac{l+1}{2^l}=\frac{l+1}{(1+1)^l}\leqslant\frac{l+1}{l+1}=1.$$

---

* Автор употребляет термин „exponential sums". — Прим. ред.

Если же простое число $p \leqslant 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$, то

$$\frac{d(p^l)}{p^{l\varepsilon}} = \frac{l+1}{p^{l\varepsilon}} \leqslant \frac{l+1}{2^{l\varepsilon}} \leqslant \frac{l+1}{l\varepsilon \log 2} \leqslant \frac{2}{\varepsilon \log 2}.$$

Пусть $q = p_1^{l_1} \ldots p_s^{l_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые множители q. Тогда

$$\frac{d(q)}{q^\varepsilon} = \prod_{p/q} \frac{d(p^l)}{p^{l\varepsilon}} \leqslant \prod_{p \leqslant 2^{1/\varepsilon}} \frac{2}{\varepsilon \log 2} = c_3(\varepsilon).$$

Первое неравенство очевидно.

Лемма 1.3. Если $(q_1, q_2) = 1$ и $f(0) = 0$, то

$$S(q_1, q_2, f(x)) = S(q_1, f(q_2 x)/q_2)\, S(q_2, f(q_1 x)/q_1).$$

Доказательство. Пусть $x = q_1 y + q_2 z$. Тогда, если y и z пробегают полные системы вычетов соответственно по модулям q_2 и q_1, то x пробегает полную систему вычетов по модулю $q_1 q_2$. Имеем, очевидно,

$$e_{q_1 q_2}(f(q_1 y + q_2 z)) = e_{q_2}(f(q_1 y)/q_1)\, e_{q_1}(f(q_2 z)/q_2)$$

и

$$S(q_1 q_2, f(x)) = \sum_{x=1}^{q_1 q_2} e_{q_1 q_2}(f(x))$$

$$= \sum_{y=1}^{q_2} \sum_{z=1}^{q_1} e_{q_2}(f(q_1 y)/q_1)\, e_{q_1}(f(q_2 z)/q_2)$$

$$= S(q_1, f(q_2 x)/q_2)\, S(q_2, f(q_1 x)/q_1).$$

Доказательство теоремы. Мы можем предположить, не нарушая общности, что $a_0 = 0$. Пусть $q = p_1^{l_1} \ldots p_s^{l_s}$, где $p_1, \ldots p_s$ различные простые множители q. По лемме 1.3

$$S = (q, f(x)) = \prod_{p/q} S\left(p^l, \frac{f(qx/p^l)}{q/p^l}\right).$$

В силу леммы 1.1 имеем

$$|S(q, f(x))| \leqslant c_2^{\nu(q)} q^{1-\alpha}.$$

Так как, по лемме 1.2 (мы можем предположить $c_2 > 1$),

$$c_2^{\nu(q)} = (2^{\nu(q)})^{\log c_2/\log 2} \leqslant c_1(k, \varepsilon)\, q^\varepsilon,$$

то мы получаем нашу теорему.

3. Доказательство основной леммы для $l=1$ (Mordell)*

Мы можем предположить, не нарушая общности, что $p>k$ и $a_0=0$. Для краткости мы пишем $\sum\limits_x$ вместо $\sum\limits_{x=1}^{p}$. Имеем

$$\sum_{a_k}\cdots\sum_{a_1}\left|\sum_x e_p(a_k x^k+\ldots+a_1 x)\right|^{2k}=$$

$$=\sum_{x_1}\cdots\sum_{x_k}\sum_{y_1}\cdots\sum_{y_k}\sum_{a_k}\cdots\sum_{a_1} e_p(a_k(x_1^k+\ldots+x_k^k-y_1^k-\ldots-y_k^k)+$$
$$+\ldots+a_1(x_1+\ldots+x_k-y_1-\ldots-y_k))=p^k N,$$

где N означает число решений системы сравнений

$$x_1^h+\ldots+x_k^h\equiv y_1^h+\ldots+y_k^h\,(\mathrm{mod}\,p),\quad 1\leqslant h\leqslant k,\quad 1\leqslant x,\ y\leqslant p, \tag{1}$$

так как

$$\sum_{x=1}^{q} e_q(hx)=\begin{cases} q, & \text{если } q\mid h,\\ 0, & \text{если } q\nmid h.\end{cases}$$

Воспользовавшись известной теоремой о симметрических функциях, можем вывести из (1)

$$(x-x_1)\cdots(x-x_k)\equiv(x-y_1)\cdots(x-y_k)\,(\mathrm{mod}\,p).$$

Отсюда следует, что числа $y_1,\ldots,y_k$ сравнимы соответственно с числами одной из перестановок чисел $x_1,\ldots,x_k$ $(\mathrm{mod}\,p)$. Поэтому

$$N\leqslant k!\,p^k.$$

Следовательно

$$\sum_{a_k}\cdots\sum_{a_1}|S(p,a_k x^k+\ldots+a_1 x)|^{2k}\leqslant k!\,p^{2k}. \tag{2}$$

Очевидно,

$$|S(p,f(x))|=|S(p,f(\lambda x+\mu)-f(\mu))|$$

для любых целых $\lambda\,(\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p))$ и μ. Всевозможные суммы такого вида встречаются в левой части (2). Найдем число сумм $S(p,f(\lambda x+\mu)-f(\mu))$, происходящих из всех различных многочленов $f(\lambda x+\mu)-f(\mu)$. Два многочлена считаются одинаковыми $(\mathrm{mod}\,p)$, если их соответствующие коэффициенты сравнимы друг с другом $(\mathrm{mod}\,p)$. Мы можем предположить, не нарушая общности, что $p\nmid a_k$. Если $f(\lambda x+\mu)-f(\mu)$ одинаково с $p\,f(x)$, то

$$a_k\lambda^k\equiv a_k,\quad k a_k\lambda^{k-1}+a_{k-1}\lambda^{k-1}\equiv a_{k-1}\,(\mathrm{mod}\,p).$$

---

* Quarterly Journ. of Math., 3 (1932), 161—167.

Число значений λ, удовлетворяющих сравнению $\lambda^k \equiv 1 \pmod p$, будет $\leqslant k$. Для фиксированного λ число μ определяется однозначно. Таким образом, имеется самое большее k многочленов $f(\lambda x + \mu) - f(\mu)$ одинаковых с $f(x)$.

Следовательно, среди многочленов

$$f(\lambda x + \mu) - f(\mu), \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant p-1, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant p$$

имеется по меньшей мере $p(p-1)/k$ различных. Поэтому

$$ap(p-1)\,|S(p, f(x))|^{2k} \leqslant k!\, p^{2k},$$

$$|S(p, f(x))| \leqslant \left(\frac{k \cdot k!}{p(p-1)}\right)^{\frac{1}{2}a} p \leqslant (2k \cdot k!)^{\frac{1}{2}a} p^{1-a}. \qquad (3)$$

4. Необходимые леммы

Определение. Пусть* $p^{l_\nu} \| \nu a_\nu$, $t = \min(l_1, \ldots, l_k)$ $(t \geqslant 0)$. Пусть s — наибольшее целое такое, что $p^t \| s a_s$. Мы считаем, по определению, что $f(x)$ имеет индекс s и употребляем обозначение $s = \operatorname{ind} f(x)$.

Лемма 1.4. $\operatorname{ind} f(x) = \operatorname{ind} f(x + \lambda)$.

Доказательство леммы очевидно, если рассмотреть $f'(x)$.

Лемма 1.5. $\operatorname{ind} f(x) \geqslant \operatorname{ind} f(px)$.

Доказательство такое же, как и доказательство леммы 1.4.

Лемма 1.6. Если $\operatorname{ind} f(x) = \operatorname{ind} f(px)$, то из $f'(x) \equiv 0 \pmod{p^{t+1}}$ следует $p \mid x$.

Доказательство. По определению, $l_s \leqslant l_{s'}$ для любого s' и, по предположению, $l_s + s \leqslant l_{s'} + s'$. Таким образом, $l_s < l_{s'}$ для $s' \neq s$; в самом деле, если $s > s'$, $l_s \leqslant l_{s'} - s + s' < l_{s'}$ и если $s < s'$, то это является очевидным следствием определения. Но тогда из $f'(x) \equiv 0 \pmod{p^{t+1}}$ следует

$$s a_s x^{s-1} \equiv 0 \pmod{p^{t+1}}.$$

5. Доказательство основной леммы

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_e$ суть различные корни сравнения $f'(x) \equiv 0 \pmod{p^{t+1}}$. Так как число решений сравнения $p^{-t} f'(x) \equiv 0 \pmod p$ будет $\leqslant k-1$, то $e \leqslant p^t (k-1)$. Так как $p \nmid (a_k, \ldots, a_1)$ и $p^t \mid (k a_k, \ldots, a_1)$, то имеем $p^t \leqslant k$ и, следовательно, $e < k^2$.

---

* $p^t \| A$ означает $p^t \mid A$, $p^{t+1} \nmid A$, т. е. $p \mid x$.

Допустим, что $l<2(t+1)$. Если $t=0$, то имеем $l=1$, и лемма следует из п. 3. Если $t\geqslant 1$, то $l\leqslant 2t+1\leqslant 3t$ и

$$\left|\sum_{x=1}^{p^l} e_{p^l}(f(x))\right|\leqslant p^l\leqslant p^{3t}\leqslant k^3.$$

Теперь мы предположим, что $l\geqslant 2(t+1)$. Очевидно,

$$\sum_{x=1}^{p^l} e_{p^l}(f(x))=\sum_{\nu=1}^{p^{t+1}}\sum_{\substack{x=1\\ x\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\,p^{t+1})}}^{p^l} e_{p^l}(f(x)).$$

Если ν не является одним из корней λ, то, полагая $x=y+p^{l-t-1}z$, имеем

$$\sum_{\substack{x=1\\ x\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\,p^{t+1})}}^{p^l} e_{p^l}(f(x))=\sum_{\substack{y=1\\ y\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\,p^{t+1})}}^{p^{l-t-1}}\sum_{z=1}^{p^{t+1}} e_{p^l}(f(y)+p^{l-t-1}zf'(y))=$$

$$=\sum_{\substack{y=1\\ y\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\,p^{t+1})}}^{p^{l-t-1}} e_{p^l}(f(y))\sum_{z=1}^{p^{t+1}} e_{p^{t+1}}(zf'(y))=0,$$

так как $p^{t+1}\nmid f'(y)$.

Поэтому

$$\left|\sum_{x=1}^{p^l} e_{p^l}(f(x))\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{e}\sum_{\substack{x=1\\ x\equiv\lambda_i\,(\mathrm{mod}\,p^{t+1})}}^{p^l} e_{p^l}(f(x))\right|\leqslant e\max_{1\leqslant i\leqslant e}\left|\sum_{y=1}^{p^{l-t-1}} e_{p^l}(f(\lambda_i+p^{t+1}y))\right|=$$

$$=e\max_{1\leqslant i\leqslant e}\left|\sum_{x=1}^{p^{l-t-1}} e_{p^{l-\mu_i}}(g_i(x))\right|,$$

где p^{μ_i} — наивысшая степень p, делящая все коэффициенты

$$f(\lambda_i+p^{t+1}x)-f(\lambda_i).$$

Полагаем

$$f(\lambda_i+p^{t+1}x)-f(\lambda_i)=g_i(x)\,p^{\mu_i}.$$

Так как $p\nmid(a_k,\ldots,a_1)$, то, очевидно, имеем

$$t+1\leqslant\mu_i\leqslant k(t+1).$$

Поэтому

$$\left|\sum_{x=1}^{p^l} e_{p^l}(f(x))\right| \leqslant e \max_{1\leqslant i\leqslant e} p^{\mu_i - t - 1}\left|\sum_{x=1}^{p^{l-\mu_i}} e_{p^{l-\mu_i}}(g_i(x))\right| \leqslant$$

$$\leqslant e \max_{1\leqslant i\leqslant e} p^{\mu_i(1-a)}\left|\sum_{x=1}^{p^{l-\mu_i}} e_{p^{l-\mu_i}}(g_i(x))\right|.$$

Если $\operatorname{ind} f(x) = \operatorname{ind} g_i(x)$, то полагаем $\Phi(x) = f(x+\lambda_i)$; тогда имеем

$$\operatorname{ind}\Phi(p^{t+1}x) = \operatorname{ind} f(p^{t+1}x + \lambda_i) = \operatorname{ind} g_i(x)\,p^{\mu_i} = \operatorname{ind} f(x) = \operatorname{ind}\Phi(x),$$

по лемме 1.4. По лемме 1.5, $\operatorname{ind}\Phi(px) = \operatorname{ind}\Phi(x)$. По лемме 1.6, из $\Phi'(x) \equiv 0 \pmod{p^{t+1}}$ следует $p \mid x$. Таким образом,

$$\left|\sum_{x=1}^{p^l} e_{p^l}(f(x))\right| = \left|\sum_{x=1}^{p^l} e_{p^l}(\Phi(x))\right| = \left|\sum_{y=1}^{p^{l-1}} e_{p^l}(\Phi(py))\right| =$$

$$= \left|\sum_{y=1}^{p^{l-1}} e_{p^l}(p^{\mu} g(y))\right| = \left|\sum_{y=1}^{p^{l-1}} e_{p^{l-\mu}}(g(y))\right| =$$

$$= p^{\mu-1}\left|\sum_{y=1}^{p^{l-\mu}} e_{p^{l-\mu}}(g(y))\right| \leqslant p^{\mu(1-a)}\left|\sum_{y=1}^{p^{l-\mu}} e_{p^{l-\mu}}(g(y))\right|,$$

так как $\mu a \leqslant 1$. Таким образом, в этом случае соответствующий множитель e равен 1. В других случаях, $e \leqslant k^2$.

Если применить этот метод последовательно, то не более чем на k шагах получится множитель k^2, а на остальных получится множитель 1, поэтому

$$|S(p^l, f(x))| \leqslant c_2(k)\,p^{(1-a)l}.$$

6. Следствия

Прежде чем формулировать следствия теоремы, мы введем понятие о многочленах с целыми значениями.

Определение. Говорят, что $f(x)$ является многочленом с целыми значениями, если $f(x)$ является целым для каждого целого x.

Лемма 1.7. Необходимое и достаточное условие того, чтобы многочлен был с целыми значениями, заключается в том, что он может быть представлен в виде

$$a_k F_k(x) + \ldots + a_1 F_1(x) + a_0,$$

где коэффициенты a суть целые и

$$\nu!\,F_\nu(x) = x(x-1)\cdots(x-\nu+1).$$

Доказательство. Очевидно, $F_\nu(x)$ есть многочлен с целыми значениями, поэтому $a_k F_k(x) + \ldots + a_1 F_1(x) + a_0$ есть многочлен с целыми значениями.

Предположим теперь, что $f(x)$ есть многочлен с целыми значениями и пусть

$$f(x) = b_k F_k(x) + \ldots + b_1 F_1(x) + b_0.$$

Полагая последовательно $x = 0, 1, 2, \ldots, k$, мы убеждаемся в том, что коэффициенты b являются целыми.

Мы можем теперь формулировать следующие следствия из теоремы и основной леммы.

Следствие 1.1. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми значениями степени k с общим наименьшим знаменателем d. Пусть $p^t \| d$. Предположим, что не все числители коэффициентов $f(x)$ делятся на p. Тогда

$$\left| \sum_{x=1}^{p^{l+t}} e_{p^l}(f(x)) \right| \leqslant c_4(k) p^{l(1-a)}.$$

Доказательство. Так как $d \mid kl$, то мы получаем это следствие.

Следствие 1.2. Предположим, что $f(x)$ есть многочлен с целыми значениями степени k с общим наименьшим знаменателем d; допустим, что не существует простого числа p, для которого сравнение $f(x) \equiv f(0) \pmod p$ имело бы место тождественно. Тогда

$$\left| \sum_{x=1}^{\overline{q}} e_q(f(x)) \right| \leqslant c_5(k, \varepsilon) q^{1-a+\varepsilon},$$

где $\overline{q} = q \cdot (d, q)$.

Следствие 1.3. При предположениях следствий 1.1 и 1.2 имеем соответственно

$$\left| \sum_{\substack{x=1 \\ p \nmid x}}^{p^{l+t}} e_{p^l}(f(x)) \right| \leqslant c_6(k) p^{(1-a)l}$$

и

$$\left| \sum_{\substack{x=1 \\ (x, q)=1}}^{\overline{q}} e_q(f(x)) \right| \leqslant c_7(k, \varepsilon) q^{1-a+\varepsilon}.$$

Доказательство. Мы докажем только первое из этих неравенств, второе же вытекает непосредственно. Имеем

$$\sum_{\substack{x=1 \\ p \nmid x}}^{p^{l+t}} e_{p^l}(f(x)) = \sum_{x=1}^{p^{l+t}} e_{p^l}(f(x)) - \sum_{x=1}^{p^{l+t-1}} e_{p^l}(f(px)).$$

По предположению,

$$p^t f(x) = a_k x_k + \ldots + a_1 x + a_0, \quad p \nmid (a_k, \ldots, a_1).$$

Пусть p^μ — наивысшая степень p, такая, что все коэффициенты

$$(f(px) - f(0))\, p^t$$

делятся на p^μ, но не делятся на $p^{\mu+1}$. Очевидно, $\mu \leqslant k$. Тогда для $l \geqslant \mu$

$$\left| \sum_{x=1}^{p^{l+t-1}} e_{p^l}(f(px)) \right| = \left| \sum_{x=1}^{p^{l+t-1}} e_{p^{l+t-\mu}}(f(px)\, p^{t-\mu}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant p^{\mu-1} \cdot c_4(k)\, p^{(l-\mu)(1-\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant c_4(k)\, p^{l(1-\alpha)-1+\mu\alpha} \leqslant c_4(k)\, p^{l(1-\alpha)}.$$

Для $l < \mu \leqslant k$ следствие очевидно, так как

$$\left| \sum_{x=1}^{p^{l+t-1}} e_{p^l}(f(px)) \right| \leqslant p^{l+t-1} \leqslant k!\, p^{l-1} \leqslant k!\, p^{(1-\alpha)l}.$$

7. Разложение функции в ряд Фурье

Пусть $g(x)$ — функция с периодом q и

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ для } 0 < x < m, \\ 0 \text{ для } m < x < q. \end{cases}$$

Если мы определяем $g(0) = g(m) = g(q) = \frac{1}{2}$, то $g(x)$ может быть разложена в ряд Фурье

$$g(x) = \frac{m}{q} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n\pi i}(e_q(nx) - e_q(n(x-m))),$$

где $\sum'$ означает сумму, в которой пропущен член с $n=0$. Оценим „хвост" ряда Фурье.

Лемма 1.8. Пусть

$$s = \sum_{q' < n \leqslant q''} e(n\alpha), \quad e(x) = e^{2\pi i x}.$$

Тогда

$$|s| \leqslant \min\left(q'' - q', \frac{1}{2\{\alpha\}}\right),$$

где $\{\alpha\}$ означает (и в дальнейшем будет означать) расстояние от α до ближайшего целого.

Доказательство. Имеем, очевидно, $|s|\leqslant q''-q'$. Далее, для $\alpha\neq[\alpha]$,

$$\left|\sum_{q'<n\leqslant q''} e(n\alpha)\right|=\left|\sum_{n=0}^{Q-1} e(n\alpha)\right|=\left|\frac{1-e(Q\alpha)}{1-e(\alpha)}\right|\leqslant\frac{2}{|1-e(\alpha)|}=$$

$$=\frac{1}{|\sin\pi\alpha|}\leqslant\frac{1}{2\{\alpha\}}$$

$\left(|\sin\pi\xi|\geqslant 2\{\xi\}\right.$, так как $\sin\pi\xi\geqslant 2\xi$ при $0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2}$ и обе части периодичны и четны$\left.\right)$.

Лемма 1.9. При $0<x<q$ и $x\neq m$ имеем

$$\left|g(x)-\frac{m}{q}-\sum_{n=-q}^{q}{}' \frac{1}{n\pi i}\left(e_q(nx)-e_q(-n(x-m))\right)\right|\leqslant\frac{z}{q}\left(\frac{1}{\left\{\frac{x}{q}\right\}}+\frac{1}{\left\{\frac{x-m}{q}\right\}}\right).$$

Доказательство. Пусть

$$s_{q'}=\sum_{n=q+1}^{q'} e_q(\pm nx),$$

тогда, по лемме 1.8, для $0<x<q$

$$|s_{q'}|\leqslant\frac{1}{2\left\{\frac{x}{q}\right\}}.$$

Имеем поэтому для $0<x<q$

$$\left|\sum_{n=q+1}^{q'}\frac{1}{n}e_q(\pm nx)\right|=\left|\sum_{n=q+1}^{q'}\frac{s_n-s_{n-1}}{n}\right|=$$

$$=\left|-\frac{s_q}{q+1}+\sum_{n=q+1}^{q'-1}s_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{s_{q'}}{q'}\right|\leqslant\frac{1}{q\left\{\frac{x}{q}\right\}}+$$

$$+\frac{1}{2\left\{\frac{x}{q}\right\}}\left(\sum_{n=q+1}^{q'-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{q'}\right)\leqslant\frac{2}{q\left\{\frac{x}{q}\right\}}.$$

Аналогично для $x\neq m$, $0<x<q$ имеем

$$\left|\sum_{n=q+1}^{q'}\frac{1}{n}e_q(\pm n(x-m))\right|\leqslant\frac{2}{q\left\{\frac{x-m}{q}\right\}}.$$

Получаем лемму 1.9.

8.

Теорема 2. Пусть $f(x)=a_k x^k+\cdots+a_1 x+a_0$ и $(a_k,\ldots,a_1)=1$. Тогда

$$\left|\sum_{x=1}^{m} e_q(f(x))-\frac{m}{q}S(q,f(x))\right|\leqslant c_8(k,\varepsilon)\,q^{1-\alpha+\varepsilon}. \tag{1}$$

В частности, если $1\leqslant m\leqslant q$, то

$$\left|\sum_{x=1}^{m} e_q(f(x))\right|\leqslant c_9(k,\varepsilon)\,q^{1-\alpha+\varepsilon}. \tag{2}$$

Замечание. Очевидно, (1) и (2) эквивалентны. Докажем только (2).

Доказательство. Очевидно, имеем

$$\left|\sum_{x=1}^{m} e_q(f(x))-\sum_{x=1}^{q}{}'' e_q(f(x))\,g(x)\right|\leqslant 2,$$

где $\sum''$ означает сумму, в которой пропущены члены с $x=m$ и $x=q$. Мы можем предположить, не нарушая общности, что $a_1\leqslant 0$. Воспользовавшись разложением $g(x)$ в ряд Фурье и леммой 1.9, найдем

$$\left|\sum_{x=1}^{m} e_q(f(x))\right|\leqslant\frac{m}{q}\left|\sum_{x=1}^{q}{}'' e_q(f(x))\right|+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\sum_{n=-q}^{q}{}' \frac{1}{n}\left(\sum_{x=1}^{q}{}'' e_q(f(x)+nx)-\sum_{x=1}^{q}{}'' e_q(f(x)+nx-mx)\right)\right|+$$

$$+2\sum_{x=1}^{q}{}''\frac{1}{q\left\{\frac{x}{q}\right\}}+2\sum_{x=1}^{q}{}''\frac{1}{q\left\{\frac{x-m}{q}\right\}}=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

Имеем

$$I_4=2\sum_{x=1}^{q}{}''\frac{1}{q\left\{\frac{x}{q}\right\}}\leqslant\frac{4}{q}\sum_{x=1}^{\frac{q}{2}}\frac{q}{x}\leqslant 4\log q;$$

такой же результат справедлив для I_5.

Далее, по теореме 1,

$$I_1=O(q^{1-\alpha+\varepsilon}).$$

Наконец, рассмотрим сумму

$$\sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{q} e_q(f(x)+nx).$$

Пусть $(a_k, \ldots, a_2, q) = q'$ и пусть q'' означает множитель q'. Мы собираем члены суммы, для которых n удовлетворяет условию

$$(a_k, \ldots, a_2, a_1+n, q) = q'',$$

тогда, по теореме 1,

$$\sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n} \left| \sum_{1}^{q} e_q(f(x)+nx) \right| \leqslant \sum_{q''/q} \sum_{\substack{n=1 \\ a_1+n \equiv 0 \pmod{q''}}}^{q} \frac{1}{n} \left| \sum_{x=1}^{q} e_{q/q''}\left(\frac{f(x)+nx}{q''}\right) \right| \ll$$

$$\ll \sum_{q''/q} \sum_{\substack{n=1 \\ a_1+n \equiv 0 \pmod{q''}}}^{q} \frac{1}{n} q'' (q/q'')^{1-\alpha+\varepsilon} \ll$$

$$\ll \sum_{q''/q} \sum_{\lambda=1}^{q/q''} \frac{1}{q''\lambda} q'' (q/q'')^{1-\alpha+\varepsilon} \ll$$

$$\ll q^{1-\alpha+\varepsilon} \sum_{q''/q} q''^{-1+\alpha+\varepsilon} \ll q^{1-\alpha+\varepsilon},$$

так как, по лемме 1.2,

$$\sum_{q''/q} q''^{-1+\alpha+\varepsilon} \leqslant \sum_{q''/q} 1 = d(q) \ll q^{\varepsilon}.$$

Это дает

$$I_2 = O(q^{1-\alpha+\varepsilon}), \quad I_3 = O(q^{1-\alpha+\varepsilon}),$$

и мы получаем нашу теорему.

ГЛАВА II

Суммирование, распространенное на функции делителей

1. Введение

Целью настоящей главы является доказательство следующей теоремы:

Теорема 3. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — многочлен k-ой степени с целыми коэффициентами. Предположим, что коэффициенты взаимно простые. Тогда

$$\sum_{x_1=1}^{P} \cdots \sum_{x_n=1}^{P} d^l(|f(x_1, \ldots, x_n)|) \leqslant c_1(k, n, l) A (\log X)^{c_2(k, n, l)},$$

где X означает максимальное значение $|f(x_1, \ldots, x_n)|$ при $1 \leqslant x \leqslant P$, а $A = \max(P^n, X^{n/k})$.

Заметим, что c_1 и c_2 не зависят от коэффициентов $f(x_1, \ldots, x_n)$. Далее, легко вывести следующее обобщение:

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен k-ой степени с целыми коэффициентами. Пусть m — общий наибольший делитель его коэффициентов, тогда

$$\sum_{\substack{x_1=1 \\ f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0}}^{P} \cdots \sum_{x_n=1}^{P} d^l(|f(x_1, \ldots, x_n)|) \leqslant c_1(k, n, l) A (\log X)^{c_2(k, n, l)} d^l(m).$$

Доказательство теоремы 3 существенно зависит от одной леммы van der Corput и от результатов, относящихся к тригонометрическим суммам из главы I.

2. Лемма van der Corput *

Лемма 2.1. Допустим, что существуют положительные числа A и γ такие, что

$$\sum_{\substack{y=1 \\ v/y}}^{X} T(y) \leqslant A \prod_{\sigma=1}^{s} \frac{\chi(p_\sigma, \alpha_\sigma)}{p_\sigma}, \qquad v = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s} \leqslant X^\gamma,$$

* Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam, 42 (1939).

где $\chi(p_\sigma, \alpha_\sigma) \geqslant 0$ и

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} (\alpha+1)^{\left(1+\frac{2}{\gamma}\right) l} \chi(p, \alpha) \leqslant C,$$

где C не зависит от p. При $\nu = 1$, $s = 0$ предполагается, что

$$\sum_{y=1}^{X} T(y) \leqslant A.$$

Тогда

$$S = \sum_{y=1}^{X} d^l(y)\, T(y) \leqslant c_3(l, C, \gamma)\, A (\log X)^C.$$

Доказательство. Полагаем $y = P_1 \ldots P_2 \ldots P_m w$, где P суть всевозможные простые числа $> X^\gamma$. Пусть v_1 — наибольший делитель w, не превосходящий X^γ, v_2 — наибольший делитель w/v_1, не превосходящий X^γ, и т. д. Предположим, что имеем окончательно

$$y = P_1 \ldots P_m v_1 \ldots v_n,$$

причем n мы будем называть индексом целого числа y, а $v_1, \ldots, v_n$ — характеристическими множителями числа y.

Очевидно, $v_{n-1} \geqslant X^{\frac{1}{2}\gamma}$. Таким образом,

$$X^{\gamma m} \leqslant P_1 \ldots P_m \leqslant X, \quad X^{\frac{1}{2}(n-1)\gamma} \leqslant v_1 \ldots v_{n-1} \leqslant X$$

и

$$m \leqslant \frac{1}{\gamma}, \quad n \leqslant 1 + \frac{2}{\gamma}.$$

Так как $d(\lambda\mu) \leqslant d(\lambda)\, d(\mu)$, то

$$d(y) \leqslant 2^m d(v_1) \ldots d(v_n) \leqslant 2^{\frac{1}{\gamma}} d(v_1) \ldots d(v_n).$$

Очевидно, имеем

$$d^l(y) \leqslant \begin{cases} 2^{\frac{l}{\gamma}}, & \text{если } n = 0, \\ 2^{\frac{l}{\gamma}} \max\limits_{\nu} d^{ln}(v_\nu) \leqslant 2^{\frac{l}{\gamma}} \sum\limits_{\nu=1}^{n} d^{ln}(v_\nu), & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

Пишем

$$S = \sum_{y=1}^{X} d^l(y)\, T(y) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant 1+2/\gamma} U_n,$$

где U_n означает часть этой суммы, распространенную по целым числам с индексом n.

При $n=0$ имеем

$$U_0 \leqslant 2^{\frac{l}{\gamma}} \sum_{y=1}^{X} T(y) \leqslant 2^{\frac{l}{\gamma}} A.$$

При $1 \leqslant n \leqslant 1+\frac{2}{\gamma}$ имеем

$$U_n \leqslant 2^{\frac{l}{\gamma}} \sum_{\nu=1}^{n} U_{n\nu},$$

где

$$U_{n\nu} = \sum_{y=1}^{X}{}' d^{ln}(v_\nu)\, T(y)$$

и $\sum\limits_{y=1}^{X}{}'$ означает сумму, распространенную на целые числа y индекса n, а v_ν — ν-й характеристический множитель числа y. Так как $2 \leqslant v_\nu \leqslant \leqslant X^\gamma$, то

$$U_{n\nu} \leqslant \sum_{2 \leqslant v \leqslant X^\gamma} d^{ln}(v) \sum_{y=1}^{X}{}'' T(y),$$

где $\sum''$ означает сумму, распространенную на целые числа с индексом n, имеющие v своим ν-м характеристическим множителем. Поэтому

$$\sum_{y=1}^{X}{}'' T(y) \leqslant \sum_{\substack{y=1 \\ v/y}}^{X} T(y) \leqslant A \prod_{\sigma=1}^{s} \frac{\chi(p_\sigma, \alpha_\sigma)}{p_\sigma}.$$

Так как $d(v)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)$, то

$$U_{n\nu} \leqslant A \sum_{2 \leqslant v \leqslant X^\gamma} \prod_{\sigma=1}^{s} \frac{(\alpha_\sigma+1)^{ln}\chi(p_\sigma, \alpha_\sigma)}{p_\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant A \prod_{p \leqslant X^\gamma} \left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)^{ln}\chi(p, \alpha)}{p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant Ae^R \leqslant c'_3 A e^{c \log\log X} \leqslant c'_3 A (\log X)^C$$

$$\left(R = c \sum_{p \leqslant X^\gamma} \frac{1}{p}\right).$$

(Здесь мы пользуемся тем фактом, что

$$\sum_{p\leqslant X}\frac{1}{p}=\log\log X+O(1),$$

являющимся следствием теоремы о распределении простых чисел. Конечно, он является также следствием леммы 7.14).

3. Леммы о числе решений сравнений

Лемма 2.2. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — многочлен k-ой степени с целыми коэффициентами. Предположим, что не все коэффициенты делятся на p. Тогда число решений сравнения

$$f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

будет $\leqslant c_4(k,n)p^{n\alpha-1}$.

Доказательство. 1) При $n=1$ лемма тривиальна, так как сравнение

$$f(x)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$$

имеет самое большее k решений.

2) Напишем $f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p^\alpha)$ в форме

$$f_s(x_1,\ldots,x_{n-1})\,x_n^s+\ldots+f_0(x_1,\ldots,x_{n-1})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p^\alpha).$$

Желая доказать лемму методом полной индукции и предполагая ее справедливой для $n-1$, мы можем сказать, что существует $O(p^{(n-1)\alpha-1})$ систем целых чисел $x_1,\ldots,x_{n-1}$, удовлетворяющих сравнению

$$f_s(x_1,\ldots,x_{n-1})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p^\alpha).$$

Для тех $f_s(x_1,\ldots,x_{n-1})$, которые $\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p^\alpha)$, имеем самое большее $O(p^{\alpha-1})$ значений x_n. Таким образом, число решений рассматриваемого сравнения будет $\leqslant c_4(k,n)\,p^{n\alpha-1}$.

Лемма 2.3. При предположениях леммы 2.2 число решений сравнения

$$f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p^\alpha)$$

будет $\leqslant c_5(k,n)(\alpha+1)^{n-1}p^{n\alpha-\alpha a}$, где $a=1/k$.

Доказательство. 1) При $n=1$ число решений сравнения

$$f(x)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p^\alpha)$$

равно

$$\frac{1}{p^\alpha}\sum_{h=1}^{p^\alpha}\sum_{x=1}^{p^\alpha}e_{p^\alpha}(hf(x)),\qquad e_q(x)=e^{2\pi i\frac{x}{q}}.$$

Пусть

$$f(x)=a_k x^k+\ldots+a_1x+a_0.$$

Если $p \mid (a_k, \ldots, a_1)$, то, по предположению, $p \nmid a_0$. Сравнение не имеет решений, поэтому можем предположить, что $p \nmid (a_k, \ldots, a_1)$. По лемме 1.1,

$$\left| \frac{1}{p^\alpha} \sum_{h=1}^{p^\alpha} \sum_{x=1}^{p^\alpha} e_{p^\alpha}(hf(x)) \right| \leqslant \frac{1}{p^\alpha} \sum_{h=1}^{p^\alpha} \left| \sum_{x=1}^{p^\alpha} e_{p^\alpha}(hf(x)) \right| =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \frac{1}{p^\alpha} \sum_{h=1}^{p^\alpha} \left| \sum_{x=1}^{p^\alpha} e_{p^\alpha}(hf(x)) \right| = O\left(\sum_{\lambda=0}^{\alpha} \frac{1}{p^\alpha} \cdot p^{\alpha-\lambda} \cdot p^\lambda \cdot p^{(\alpha-\lambda)(1-a)} \right) =$$

$$= O\left(p^{\alpha(1-a)}\right),$$

так как

$$\sum_{\lambda=0}^{\alpha} p^{-\lambda(1-a)} = O(1).$$

2) Индукция. Мы переписываем сравнение

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

в виде

$$g_k x_n{}^k + \ldots + g_0 \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad g_\nu = g_\nu(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Теперь мы рассмотрим те системы $x_1, \ldots, x_{n-1}$, для которых либо

$$p^\lambda \| (g_k, \ldots, g_0), \quad \alpha > \lambda > 0, \tag{1}$$

либо $p^\alpha \mid (g_k, \ldots, g_0)$. В последнем случае мы имеем

$$O\left((\alpha+1)^{n-2} p^{(n-1)\alpha - \alpha a} p^\alpha\right) = O\left((\alpha+1)^{n-2} p^{n\alpha - \alpha a}\right)$$

решений. Предположим теперь, что условие (1) выполнено. Так как по меньшей мере в одном из многочленов g, например g_μ, не все коэффициенты $\equiv 0 \pmod p$, то, по предположению индукции, сравнение

$$g_\mu \equiv 0 \pmod{p^\lambda}, \quad 0 < x_\nu \leqslant p^\alpha, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n-1$$

имеет самое большее

$$O\left((\alpha+1)^{n-2} p^{(n-1)(\alpha-\lambda) + (n-1)\lambda - \lambda a}\right) = O\left((\alpha+1)^{n-2} p^{(n-1)\alpha - \lambda a}\right)$$

решений, т. е. число систем $x_1, \ldots, x_{n-1}$, удовлетворяющих условию (1), будет $O\left((\alpha+1)^{n-2} p^{(n-1)\alpha - \lambda a}\right)$. Для каждой системы $x_1, \ldots, x_{n-1}$, удовлетворяющей условию (1), сравнение

$$\frac{g_k}{p^\lambda} x_n{}^k + \ldots + \frac{g_0}{p^\lambda} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-\lambda}}, \quad 0 < x_n \leqslant p^\alpha$$

дает самое большее $O\left(p^{\lambda + (\alpha-\lambda)(1-a)}\right) = O\left(p^{\alpha - (\alpha-\lambda)a}\right)$ значений x_n.

Поэтому число решений сравнения, рассматриваемого в лемме, при условии (1) будет

$$O\left((\alpha+1)^{n-2} p^{(n-1)\alpha-\lambda\alpha} \cdot p^{\alpha-(\alpha-\lambda)\alpha}\right) = O\left((\alpha+1)^{n-2} p^{n\alpha-\alpha\alpha}\right).$$

Это, очевидно, справедливо и при $\lambda=0$. Таким образом, число решений сравнения, рассматриваемого в лемме, будет

$$O\left(\sum_{\lambda=0}^{\alpha}(\alpha+1)^{n-2} p^{n\alpha-\alpha\alpha}\right) = O\left((\alpha+1)^{n-1} p^{n\alpha-\alpha\alpha}\right).$$

4. Доказательство теоремы

В лемме 2.1 мы полагаем, что $T(y)$ есть число решений для

$$|f(x_1,\ldots,x_n)|=y, \quad 1 \leqslant x_\nu \leqslant P.$$

Тогда

$$\sum_{\substack{x_1=1 \\ f(x_1,\ldots,x_n)\neq 0}}^{P} \cdots \sum_{x_n=1}^{P} d^l(|f(x_1,\ldots,x_n)|) = \sum_{y=1}^{X} d^l(y)\, T(y),$$

де X — наибольшее значение $|f(x_1,\ldots,x_n)|$ при $1 \leqslant x \leqslant P$.

Полагаем $\gamma=a$ и

$$\chi(p,\alpha) = \begin{cases} O(1), \\ O\left((\alpha+1)^{n+1} p^{1-a\alpha}\right). \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{y=1}^{X} T(y) = \sum_{x_1=1}^{P} \cdots \sum_{x_n=1}^{P} 1 = P^n = A$$

и

$$\sum_{\substack{y=1 \\ p^\alpha/y}}^{X} T(y) \leqslant \left(\frac{P}{p^\alpha}+1\right)^n M,$$

где M — число решений сравнения

$$f(x_1,\ldots,x_n) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

По леммам 2.2 и 2.3, имеем

$$\sum_{\substack{y=1 \\ p^\alpha/y}}^{X} T(y) = O\left(A\begin{Bmatrix} p^{-1} \\ (\alpha+1)^{n-1} p^{-a\alpha} \end{Bmatrix}\right) = A\,\frac{\chi(p,\alpha)}{p}.$$

Так как

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}(\alpha+1)^{\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)l}\chi(p,\alpha)=O\Bigg(\sum_{\alpha\leqslant k}(\alpha+1)^{(1+2k)l}+$$
$$+\sum_{\alpha>k}(\alpha+1)^{(1+2k)l+n-1}p^{1-\eta\alpha}\Bigg)=O(1),$$

то мы получаем нашу теорему.

5.

Для дальнейшего мы докажем два более точных результата, относящихся к функциям делителей.

Лемма 2.4. Пусть t целое; тогда

$$\sum_{0<z\leqslant P}\frac{(d(z))^t}{z}\leqslant c_6(t)(\log P)^{2^t}.$$

Доказательство. Результат очевиден при $t=0$. Мы предположим, что он справедлив для $t-1$. Тогда имеем

$$\sum_{0<z\leqslant P}\frac{(d(z))^t}{z}=\sum_{0<z\leqslant P}\frac{(d(z))^{t-1}}{z}\sum_{\lambda/z}1=\sum_{0<\lambda\leqslant P}\sum_{\substack{0<z\leqslant P\\ \lambda/z}}\frac{(d(z))^{t-1}}{z}=$$
$$=\sum_{0<\lambda\leqslant P}\frac{(d(\lambda))^{t-1}}{\lambda}\sum_{0<\mu\leqslant P/\lambda}\frac{(d(\mu))^{t-1}}{\mu}\leqslant c_6^2(t-1)(\log P)^{2^t}.$$

Лемма 2.5. Пусть t целое; тогда

$$\sum_{0<z\leqslant P}(d(z))^t\leqslant c_7(t)P(\log P)^{2^t-1}.$$

Доказательство. По лемме 2.4, имеем

$$\sum_{0<z\leqslant P}(d(z))^t\leqslant\sum_{0<z\leqslant P}(d(z))^{t-1}\sum_{\lambda/z}1=$$
$$=\sum_{0<\lambda\leqslant P}\sum_{0<z\leqslant P}(d(z))^{t-1}=$$
$$=\sum_{0<\lambda\leqslant P}(d(\lambda))^{t-1}\sum_{0<\mu\leqslant P/\lambda}(d(\mu))^{t-1}=$$
$$=O\Bigg(\sum_{0<\lambda\leqslant P}(d(\lambda))^{t-1}\frac{P}{\lambda}(\log P)^{2^{t-1}-1}\Bigg)=$$
$$=O\left(P(\log P)^{2^t-1}\right).$$

ГЛАВА III

Теоремы о среднем значении некоторых тригонометрических сумм (I)

1.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми значениями k-ой степени и

$$T(\alpha)=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)\alpha}.$$

Тогда, при $1 \leqslant \nu \leqslant k$,

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^\nu}\, d\alpha \leqslant c_1(k,\nu)\, P^{2^\nu-\nu}\, (\log P)^{c_2(k,\nu)}\, d^{\nu-1}(u),$$

где u — общий наибольший делитель числителей $f(x)$, а $c(k,\nu)$ означает, что c зависит только от k и от ν — коэффициентов многочлена $f(x)$.

Замечание. В силу выпуклости функции

$$g(\lambda)=\log\left(\int_0^1 |T(\alpha)|^{\lambda}\, d\alpha\right)$$

можем получить неравенство с любым вещественным положительным числом λ вместо 2^ν. Более точно, при $2^\nu<\lambda\leqslant 2^{\nu+1}$ пользуемся неравенством

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^{\lambda}\, d\alpha \leqslant \left(\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^\nu}\, d\alpha\right)^{2-2^{-\nu}\lambda} \left(\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^{\nu+1}}\, d\alpha\right)^{2^{-\nu}\lambda-1}.$$

Мы не приводим доказательства этого неравенства, так как получаемый из него результат не будет употребляться в дальнейшем.

2. Леммы, относящиеся к неравенствам

Лемма 3.1. Если $\alpha+\beta=1$, $\alpha>0$, $\beta>0$, то

$$s^\alpha t^\beta \leqslant s\alpha+t\beta.$$

Доказательство. При $x>1$, $0<m<1$ имеем

$$x^m-1=m\int_1^x y^{m-1}\,dy\leqslant m\int_1^x dy=m(x-1).$$

Полагая $x=\frac{s}{t}$ $(s>t)$, $m=\alpha$ и $1-m=\beta$, мы получаем нашу лемму.

Лемма 3.2. Если $\alpha+\beta=1$, $\alpha>0$, $\beta>0$, то при вещественных a_n и b_n $(1\leqslant n\leqslant r)$ имеем

$$\left|\sum_{n=1}^{r}a_nb_n\right|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{r}|a_n|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\left(\sum_{n=1}^{r}|b_n|^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta}.$$

(На эту лемму мы будем ссылаться как на неравенство Hölder'a, а на частный случай леммы при $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ мы будем ссылаться как на неравенство Cauchy.)

Доказательство. По лемме 3.1,

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{r}|a_nb_n|}{\left(\sum\limits_{n=1}^{r}|a_n|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\left(\sum\limits_{n=1}^{r}|b_n|^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta}}=\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{|a_n|^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{n=1}^{r}|a_n|^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha}\left(\frac{|b_n|^{\frac{1}{\beta}}}{\sum\limits_{n=1}^{r}|b_n|^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{\beta}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{\alpha\,|a_n|^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{n=1}^{r}|a_n|^{\frac{1}{\alpha}}}+\frac{\beta\,|b_n|^{\frac{1}{\beta}}}{\sum\limits_{n=1}^{r}|b_n|^{\frac{1}{\beta}}}\right)=\alpha+\beta=1.$$

Лемма 3.3. Пусть

$$\mathop{\Delta}_{y}Q(x)=\frac{1}{y}(Q(x+y)-Q(x)),\quad I=\sum_{x=1}^{P}e(f(x))$$

и пусть $\sum\limits_{x}^{P}$ означает* суммирование по переменному x, пробегающему $\leqslant c_2(k)P$ значений. Тогда

$$|I|^{2^{\mu}}\leqslant c_3(\mu)P^{2^{\mu}-\mu-1}\sum_{y_1}^{P}\cdots\sum_{y_\mu}^{P}\sum_{x_{\mu+1}}^{P}e\,(y_1\ldots y_\mu\mathop{\Delta}_{y_\mu}\ldots\mathop{\Delta}_{y_1}f(x_{\mu+1}))$$

для $\mu=1,2,\ldots,k$.

* Это обозначение будет сохранено всюду в дальнейшем.

Доказательство. Имеем

$$|I|^2 = \sum_{x_1=1}^{P} \sum_{x_2=1}^{P} e((f(x_1) - f(x_2)) =$$

$$= \sum_{x_2}^{P} \sum_{y_1}^{P} e((f(x_2 + y_1) - f(x_2)) =$$

$$= \sum_{y_1}^{P} \sum_{x_2}^{P} e(y_1 \underset{y_1}{\Delta} f(x_2)).$$

Следовательно, лемма справедлива для $\mu = 1$.

Допустим, что лемма справедлива для $\mu - 1$. Тогда, в силу неравенства Cauchy,

$$|I|^{2^\mu} = \left(|I|^{2^{\mu-1}}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant c_3^2(\mu - 1) P^{2(2^{\mu-1} - \mu)} \left| \sum_{y_1}^{P} \cdots \sum_{y_{\mu-1}}^{P} \sum_{x_\mu}^{P} e(y_1 \ldots y_{\mu-1} \underset{y_{\mu-1}}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_\mu)) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant P^{2^\mu - 2\mu} P^{\mu-1} \sum_{y_1}^{P} \cdots \sum_{y_{\mu-1}}^{P} \left| \sum_{x_\mu}^{P} e(y_1 \ldots y_{\mu-1} \underset{y_{\mu-1}}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_\mu)) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant P^{2^\mu - \mu - 1} \sum_{y_1}^{P} \cdots \sum_{y_\mu}^{P} \sum_{x_{\mu+1}}^{P} e(y_1 \ldots y_\mu \underset{y_\mu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_{\mu+1})).$$

Лемма 3.4. Если $Q(x)$ — многочлен k-ой степени со старшим коэффициентом α, то $\underset{y}{\Delta} Q(x)$ — многочлен от x $(k-1)$-ой степени со старшим коэффициентом k_α. Следовательно,

$$\underset{y_1}{\Delta} \ldots \underset{y_{k-1}}{\Delta} Q(x) = k! \alpha x + B,$$

$$\underset{y_1}{\Delta} \ldots \underset{y_k}{\Delta} Q(x) = k! \alpha.$$

Доказательство леммы очевидно.

3. Доказательство теоремы

Мы можем предположить, не нарушая общности, что $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Действительно, пусть q — общий наименьший знаменатель коэффициентов $f(x)$; тогда, по неравенству Hölder'a (лемма 3.2), имеем

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^\lambda d\alpha = \int_0^1 \left| \sum_{t=1}^{q} \sum_{x=1}^{\left[\frac{P-t}{q}\right]} e(f(qx+t)\alpha) \right|^\lambda d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant q^{\lambda-1} \sum_{t=1}^{b} \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{\left[\frac{P-t}{q}\right]} e(f(qx+t) - f(t))\alpha \right|^\lambda d\alpha,$$

где $f(qx+t)-f(t)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Теорема очевидна при $\nu=1$. Из леммы 3.3 выводим

$$|T(\alpha)|^{2^\mu} \leqslant P^{2^\mu-1} + P^{2^\mu-\mu-1} \sum_{y_1}^{P} \cdots \sum_{y_\mu}^{P} \sum_{x_{\mu+1}}^{P}{}^{*} e(y_1 \ldots y_\mu \underset{y_\mu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_{\mu+1})\alpha), \qquad (1)$$

где * означает условие

$$y_1 \ldots y_\mu \underset{y_\mu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_{\mu+1}) \neq 0.$$

В самом деле, из $y_1 \ldots y_\mu \underset{y_\mu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_{\mu+1}) = 0$ следует либо $y_\nu = 0$ для определенного ν, либо $\underset{y_\mu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_{\mu+1}) = 0$. Отсюда получается оценка (1), так как старший коэффициент многочлена $\underset{y_\mu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_{\mu+1})$ не равен нулю.

Умножая (1) на $|T(\alpha)|^{2^\mu}$ и интегрируя по α в пределах от 0 до 1, получаем

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 |T(\alpha)|^{2^{\mu+1}} d\alpha \leqslant P^{2^\mu-1} \int_0^1 |T(\alpha)|^{2^\mu} d\alpha + \\ + P^{2^\mu-\mu-1} \int_0^1 \sum_{y_1}^{P} \cdots \sum_{y_\mu}^{P} \sum_{x_{\mu+1}}^{P}{}^{*} e(y_1 \ldots y_\mu \underset{y_\mu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_{\mu+1})\alpha) |T(\alpha)|^{2^\mu} d\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

По предположению индукции, первый член правой части (2) равен

$$O(P^{2^\mu-1} P^{2^\mu-\mu} (\log P)^{c_2(k,\mu)} (d(u)^{\mu-1}) =$$

$$= O(P^{2^{\mu+1}-\mu-1} (\log P)^{c_2(k,\mu)} (d(u)^{\mu-1}).$$

Второй член правой части (2) равен

$$P^{2^\mu-\mu-1} \int_0^1 \sum_{y_1}^{P} \cdots \sum_{y_\mu}^{P} \sum_{x_{\mu+1}}^{P}{}^{*} \sum_{z_1}^{P} \cdots \sum_{z_{2^\mu}}^{P} e\Big((y_1 \ldots y_\mu \underset{y_\mu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_{\mu+1}) -$$

$$- f(z_1) - f(z_{2^{\mu-1}}) + f(z_{2^{\mu-1}+1}) + \ldots + f(z_{2^\mu})\alpha\Big) d\alpha =$$

$$= P^{2^\mu-\mu-1} R,$$

где R — число решений системы

$$\left.\begin{aligned} y_1 \ldots y_\mu \underset{y_\mu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_{\mu+1}) = f(z_1) + \ldots + f(z_{2^{\mu-1}}) - f(z_{2^{\mu-1}+1}) - \ldots - \\ - f(z_{2^\mu}),\ \ y_1 \ldots y_\mu \underset{y_\mu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_{\mu+1}) \neq 0, \quad z_\nu,\ y_\nu,\ x_{\mu+1} \leqslant P. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

При данных $z_1, \ldots, z_{2^\mu}$ число решений системы (3) будет

$$\leqslant d^\mu(f(z_1) + \ldots + f(z_{2^{\mu-1}}) - f(z_{2^{\mu-1}+1}) - \ldots - f(z_{2^\mu})).$$

По теореме (3), имеем

$$R \leqslant \sum_{z_1} \cdots \sum_{z_{2^\mu}}{}^{**} d^\mu(f(z_1) + \ldots - f(z_{2^\mu})) \leqslant$$

$$\leqslant d^\mu(u) P^{2^\mu} (\log P)^{c_3(k,\mu)},$$

где $**$ означает условие $f(z_1) + \ldots - f(z_{2^\mu}) \neq 0$. Теорема таким образом доказана.

4. Лемма Weyl'я

Лемма 3.5. Пусть $q > 0$,

$$\left|\alpha - \frac{h}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \quad (h, q) = 1$$

и

$$\Omega = \sum_{x=f+1}^{f+q} \min\left(U, \frac{1}{2\{\alpha x\}}\right).$$

Тогда

$$\Omega < 6U + q \log q.$$

Доказательство. Мы пишем $\alpha = \frac{h}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $|\theta| \leqslant 1$. Пусть $x = x_1 + f$; тогда $1 \leqslant x_1 \leqslant q$. Напишем αf в виде

$$\alpha f = \frac{b}{q} + \frac{\theta'}{q}, \ \ |\theta'| \leqslant 1, \ b\text{ — целое.}$$

Так как $x_1 \leqslant q$, то имеем

$$\{\alpha x\} = \{\alpha x_1 + \alpha f\} = \left\{\frac{hx_1}{q} + \frac{\theta x_1}{q^2} + \frac{b}{q} + \frac{\theta'}{q}\right\} = \left\{\frac{\rho + 2\theta''}{q}\right\}, \quad |\theta''| \leqslant 1,$$

где ρ означает наименьший абсолютный вычет числа $hx_1 + b$ по модулю q.

Так как $(h, q) = 1$, то, когда x_1 пробегает полную систему вычетов по модулю q, ρ пробегает значения $0, 1, \ldots, \left[\frac{1}{2}q\right]$, причем каждое из них является значением ρ не более чем дважды.

Мы заменяем члены Ω с $\rho \leqslant 2$ через U. Остальные члены могут быть переписаны в виде

$$\rho = 2 + s, \quad 0 < s \leqslant \frac{1}{2} q - 2.$$

Имеем

$$\left\{ \frac{\rho + 2\theta''}{q} \right\} > \frac{s}{q}.$$

Следовательно,

$$\Omega \leqslant 6U + 2 \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}q-2} \frac{1}{\frac{2s}{q}} < 6U + q \log q.$$

Лемма 3.6 (Weyl). Если $\alpha_k, \ldots, \alpha_0$ вещественны и

$$f(x) = \alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

$$\left| \alpha_k - \frac{h}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q_2}, \quad (h, q) = 1,$$

то

$$S = \sum_{x=1}^{P} e(f(x)) \ll P^{1+\varepsilon} q^{\varepsilon} \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{q} + \frac{q}{P^k} \right)^{2^{1-k}}.$$

Доказательство. В силу лемм 3.3 и 3.4, имеем

$$|S|^{2^{k-1}} \ll P^{2^{k-1}-k} \sum_{y_1}^{P} \cdots \sum_{y_{k-1}}^{P} \sum_{x_k}^{P} e\left(y_1 \ldots y_{k-1} \underset{y_{k-1}}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta} f(x_k)\right) \ll$$

$$\ll P^{2^{k-1}-k} \sum_{y_1}^{P} \cdots \sum_{y_{k-1}}^{P} \left| \sum_{x_k}^{P} e(k!\, y_1 \ldots y_{k-1} x_k \alpha_k) \right| \ll$$

$$\ll P^{2^{k-1}} + P^{2^{k-1}-k} \sum_{y_1}^{P} \cdots \sum_{y_{k-1}}^{P}{}^{*} \left| \sum_{x_k}^{P} e(k!\, y_1 \ldots y_{k-1} x_k \alpha_k) \right|,$$

где * означает условие, что $y_1 \ldots y_{k-1} \neq 0$. Так как, по лемме 1.2, число решений системы

$$k!\, y_1 \ldots y_{k-1} = Y, \quad Y \ll P^{k-1}$$

будет $\leqslant (d(Y))^{k-1} = O(P^{\varepsilon})$, то

$$|S|^{2^{k-1}} \ll P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k+\varepsilon} \sum_{y}^{P^{k-1}} \left| \sum_{x}^{P} e(Yx\alpha_k) \right|.$$

По лемме 1.8, имеем

$$\sum_{x}^{P} e(Yx\alpha_k) \ll \min\left(P, \frac{1}{\{Y\alpha_k\}}\right),$$

и, по лемме 3.5,

$$\sum_{Y}^{P^{k-1}} \min\left(P, \frac{1}{\{Y\alpha_k\}}\right) \ll \left(\frac{P^{k-1}}{q} + 1\right) \max_f \left(\sum_{Y=f+1}^{f+q} \min\left(P, \frac{1}{\{Y\alpha_k\}}\right)\right) \ll$$

$$\ll \left(\frac{P^{k-1}}{q} + 1\right)(P + q \log q).$$

Следовательно,

$$|S|^{2^{k-1}} \ll P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k+\varepsilon}\left(\frac{P^{k-1}}{q} + 1\right)(P + q \log q) \ll$$

$$\ll P^{\varepsilon} q^{\varepsilon} P^{2^{k-1}}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{q} + \frac{q}{P^k}\right).$$

ГЛАВА IV

Теоремы о среднем значении некоторых тригонометрических сумм (II)

1.

Теорема 5 (теорема B_k). Пусть P целое положительное и

$$C_k = \sum_{x=1}^{P} e(\alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x).$$

Тогда

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |C_k|^\lambda \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \leqslant c_1(k, \varepsilon) P^{\lambda - \frac{1}{2} k(k+1) + \varepsilon},$$

где $\lambda = \lambda(k)$ определяется следующей таблицей:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	6	16	46	124	312	760	1778	4068	9190

Более того (теорема B_2'), при $k=2$ имеем более точный результат:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P} e(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x) \right|^6 d\alpha_1 \, d\alpha_2 \leqslant b_1 P^3 (\log P)^3.$$

Доказательство теоремы зависит от следующей теоремы.

Теорема 6 (теорема A_k). Пусть

$$f(x) = a_0 x_k + a_1 x^{k-1} + \ldots,$$

где a_0 — положительное целое число $\leqslant b_2(k)$ и a_1 — целое, не превосходящее по абсолютному значению $b_3(k) P$. Пусть

$$S_k = \sum_{x=1}^{P} e(\alpha_k f(x) + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_1 x).$$

Тогда имеем

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S_k|^\lambda \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{k-2}\, d\alpha_k \leqslant c_2(k, \varepsilon) P^{\lambda - \frac{1}{2}(k^2-k+2)+\varepsilon},$$

где $\lambda = \lambda(k)$ определяется следующей таблицей:

k	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	10	32	86	220	536	1272	2930	6628

Доказательства обеих теорем зависят друг от друга; именно, мы докажем справедливость теоремы A_k при помощи A_{l_1} и B_{l_2} для $l_1 \leqslant k-1$ и $l_2 \leqslant k-1$, и справедливость теоремы B_k при помощи A_{l_1} и B_{l_2} для $l_1 \leqslant k$ и $l_2 \leqslant k-1$. Применяемые методы различны для различных k. Конечно, существует единообразный метод, при котором мы можем применить индукцию, но такой метод дает более слабые результаты. Поэтому нам приходится удовлетвориться таким сложным и не единообразным методом.

2. Замечание о теореме A_k (т. е. о теореме 6)

Мы можем предположить, что $f(x) = x^k$ в $A(k)$. Действительно, интеграл

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S_k|^{2\mu} \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k$$

равен числу решений системы диофантовых уравнений:

$$f(x_1) + \ldots + f(x_\mu) = f(y_1) + \ldots + f(y_\mu),$$

$$x_1^h + \ldots + x_\mu^h = y_1^h + \ldots + y_\mu^h, \qquad 1 \leqslant h \leqslant k-2,$$

$$0 < x_\nu \leqslant P, \qquad 0 < y_\nu \leqslant P.$$

Умножая эти уравнения соответственно на $a_0^{k-1} k^k$, $a_0^h k^h$ $(1 \leqslant h \leqslant k-2)$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \{(a_0 k x_\nu)^k + k a_1 (a_0 k x_\nu)^{k-1} + \ldots\} = \sum_{\nu=1}^{\mu} \{(a_0 k y_\nu)^k + k a_1 (a_0 k y_\nu)^{k-1} + \ldots\},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} (a_0 k x_\nu)^h = \sum_{\nu=1}^{\mu} (a_0 k y_\nu)^h, \qquad 1 \leqslant h \leqslant k-2.$$

Полагая $x_\nu' = a_0 k x_\nu + a_1$ и $y_\nu' = a_0 k y_\nu + a_1$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &x_1'^k + \ldots + x_\mu'^k = y_1'^k + \ldots + y_\mu'^k, \\ &x_1'^h + \ldots + x_\mu'^h = y_1'^h + \ldots + y_\mu'^h, \quad 1 \leqslant h \leqslant k-2 \end{aligned} \tag{1}$$

с условиями

$$k \mid (x_\nu' - a_1), \quad k \mid (y_\nu' - a_1).$$

Поэтому

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S_k|^{2\mu}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{k-2}\, d\alpha_k \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x=a_1}^{a_0 kP + a_1} e(\alpha_k x^k + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_1 x) \right|^{2\mu} d\alpha_1 \ldots d\alpha_{k-2}\, d\alpha_k \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^{2\mu-1} \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x=a_1}^{-1} e(\alpha_k x^k + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_1 x) \right|^{2\mu} d\alpha_1 \ldots d\alpha_{k-1}\, d\alpha_k + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x=0}^{a_0 kP + a_1} e(\alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x) \right|^{2\mu} d\alpha_1 \ldots d\alpha_{k-2}\, d\alpha_k \right)^* \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x=q}^{\leqslant P} e(\alpha_k x^k + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_1 x) \right|^{2\mu} d\alpha_1 \ldots d\alpha_{k-2}\, d\alpha_k + 1,$$

так как $a_0 \leqslant 1$ и $a_1 \leqslant P$. Следовательно, мы должны рассмотреть только случай, когда $f(x) = x^k$.

3.

Нашей целью теперь является доказать, что

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S_k|^{2k}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{k-2}\, d\alpha_k \leqslant b_4(k) P^k L^{k(2^{k-1}-1)}$$

и

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |C_k|^{2(k+1)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \leqslant b_5(k) P^{k+1} L^{2^k - 1},$$

где $L = \log P$.

Лемма 4.1. Пусть

$$s_\nu = x_1^\nu + \ldots + x_k^\nu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant k.$$

---

* Для $a_1 > -1$ первая пустая сумма означает 0, а для $a_0 kP + a_1 < 0$ вторая пустая сумма означает 0.

Симметрическая функция

$$f=(s_1-x_1)\dots(s_1-x_k)$$

может быть выражена как функция от $s_1, \dots, s_{k-2}$ и s_k, но не от s_{k-1}.

Доказательство. Имеем

$$f=s_1^k-\sigma_1 s_1^{k-1}+\sigma_2 s_1^{k-2}-\dots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k\sigma_k,$$

где σ_i означает i-ю элементарную симметрическую функцию от $x_1, \dots, x_k$. Воспользовавшись одной известной теоремой о симметрических функциях, найдем

$$f=(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k\sigma_k+f_1(s_1, \dots, s_{k-2}). \tag{1}$$

По формуле Ньютона о симметрических функциях, именно

$$(-1)^k k\sigma_k=-s_k+\sigma_1 s_{k-1}+(-1)^k\sigma_{k-1}s_1+f_2(s_1, \dots, s_{k-2})$$

и

$$(-1)^{k-1}(k-1)\sigma_{k-1}=-s_{k-1}+f_3(s_1, \dots, s_{k-2}),$$

имеем, следовательно,

$$k((-1)^k\sigma_k+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1)=$$
$$=-s_k+\sigma_1 s_{k-1}+(-1)^k\sigma_{k-1}s_1+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1-s_1 s_{k-1}+f_4(s_1, \dots, s_{k-2})=$$
$$=-s_k+f_4(s_1, \dots, s_{k-2}). \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) мы получаем нашу лемму.

Лемма 4.2. Пусть $k\geqslant 3$. Пусть $s_\nu=\sum_{\mu=1}^{k-1} x_\mu^\nu$ и $s_\nu'=\sum_{\mu=1}^{k-1} y_\mu^\nu$. Если $x_\mu>0$, $y_\mu>0$ и

$$s_k=s_k', \quad s_\nu=s_\nu', \quad 1\leqslant\nu\leqslant k-2,$$

тогда ряд чисел $x_1, \dots, x_{k-1}$ является перестановкой ряда чисел $y_1, \dots, y_{k-1}$.

Доказательство. Пусть σ_ν и σ_ν' — соответственно ν-ые элементарные симметрические функции от $x_1, \dots, x_{k-1}$ и от $y_1, \dots, y_{k-1}$. Тогда, по формуле Ньютона, имеем

$$s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\dots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1=0$$

и

$$s_{k-1}-\sigma_1 s_{k-2}+\dots+(-1)^{k-1}(k-1)\sigma_{k-1}=0.$$

Аналогичные равенства имеют место для $y_1, \dots, y_{k-1}$. Так как $s_k=s_k'$, $s_\nu=s_\nu'$ и $\sigma_\nu=\sigma_\nu'$ для $1\leqslant\nu\leqslant k-2$, то

$$\sigma_1(s_{k-1}-s'_{k-1})+(-1)^{k-1}s_1(\sigma_{k-1}-\sigma'_{k-1})=0$$

и

$$s_{k-1}-s'_{k-1}+(-1)^{k-1}(k-1)(\sigma_{k-1}-\sigma'_{k-1})=0.$$

Следовательно,

$$(\sigma_1(k-1)-s_1)(s_{k-1}-s'_{k-1})=0.$$

Так как $\sigma_1(k-1)-s_1=(k-2)s_1\neq 0$, то

$$s_{k-1}=s'_{k-1}.$$

Таким образом, ряд чисел $x_1, \ldots, x_{k-1}$ является перестановкой ряда чисел $y_1, \ldots, y_{k-1}$.

Лемма 4.3.

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^{2k}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{k-2}\, d\alpha_k \leqslant b_4(k) P^k L^{k(2^{k-1}-1)}.$$

Доказательство. Пусть $l=x_1+\cdots+x_k$. Тогда, по лемме 4.1, из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &x_1^k+\cdots+x_k^k=y_1^k+\cdots+y_k^k,\\ &x_1^h+\cdots+x_k^h=y_1^h+\cdots+y_k^h, \quad 1\leqslant h\leqslant k-2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

следует, что

$$(l-x_1)\cdots(l-x_k)=(l-y_1)\cdots(l-y_k),$$

так как $x_1+\cdots+x_k=y_1+\cdots+y_k$.

Для данных $y_1,\ldots,y_k$ с условием

$$(l-y_1)\cdots(l-y_k)\neq 0 \tag{4}$$

имеется самое большее

$$d^{k-1}(|(l-y_1)\cdots(l-y_k)|)$$

систем целых чисел $x_1, \ldots, x_k$. Таким образом, число решений системы (3) с условием (4) будет, по лемме 2.5

$$\begin{aligned} &\leqslant \sum_{y_1}^{P}\cdots\sum_{y_k}^{P} d^{k-1}(|(l-y_1)\ldots(l-y_k)|)=\\ &=\sum_{z_1}^{P}\cdots\sum_{z_k}^{P} d^{k-1}(z_1)\ldots d^{k-1}(z_k)\leqslant\\ &\leqslant\left(\sum_{z}^{P} d^{k-1}(z)\right)^k\leqslant\\ &\leqslant P^k L^{k(2^{k-1}-1)}. \end{aligned}$$

Далее, если условие (4) не выполнено, то из

$$(l-x_1)\cdots(l-x_k)=(l-y_1)\cdots(l-y_k)=0$$

мы выводим, что, по меньшей мере, одно из чисел x равно одному из чисел y, например $x_k = y_k$. Тогда, по лемме 4.2, из (3) следует, что ряд чисел $x_1, \ldots, x_{k-1}$ является перестановкой ряда чисел $y_1, \ldots, y_{k-1}$. Число решений будет $\leqslant P^k$. Таким образом, мы получаем нашу лемму.

Лемма 4.4. Система уравнений

$$x_1^h + \cdots + x_{k+1}^h = y_1^h + \cdots + y_{k+1}^h, \quad 1 \leqslant h \leqslant k \tag{5}$$

влечет за собой соотношение вида

$$(x_k - y_1) \ldots (x_k - y_k) = (x_{k+1} - y_{k+1})\, g(y_1, \ldots, y_k, x_k, y_{k+1}, x_{k+1}),$$

где g — однородный многочлен $(k-1)$-й степени указанных переменных; однородный многочлен от x_{k+1}, y_{k+1}, содержащийся в g, не делится на $x_{k+1} - y_{k+1}$, и коэффициент при x_{k+1}^{k-1} в g есть постоянное $\neq 0$.

Доказательство. Пусть $s_\nu = \sum\limits_{j=1}^{k-1} x_j^\nu$ и $t_\nu = \sum\limits_{j=1}^{k-1} y_j^\nu$.

Тогда (5) эквивалентно

$$s_h = t_h - (x_k^h - y_k^h) - (x_{k+1}^h - y_{k+1}^h), \qquad 1 \leqslant h \leqslant k. \tag{6}$$

Хорошо известно, что

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 = 0, \tag{7}$$

где $\sigma_i = \sigma_i(x_1, \ldots, x_{k-1})$ есть i-ая элементарная симметрическая функция от $x_1, \ldots, x_{k-1}$. Известно также, что $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$ могут быть выражены в виде многочленов от $s_1, \ldots, s_{k-1}$. Более точно, мы имеем тождество:

$$s_k - s_1 s_{k-1} + \sigma_2(s_1, s_2) s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1}(s_1, \ldots, s_{k-1}) = 0. \tag{8}$$

Аналогично, имеем

$$t_k - t_1 t_{k-1} + \sigma_2(t_1, t_2) t_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1}(t, \ldots, t_{k-1}) = 0. \tag{9}$$

Пусть $T(y_1, \ldots, y_k, x_k, y_{k+1}, x_{k+1})$ — многочлен, полученный при подстановке (6) в левую часть (8). Установим теперь формулу

$$T(y_1, \ldots, y_k, x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) = \lambda (x_k - y_1) \ldots (x_k - y_k).$$

В самом деле, $T(y_1, \ldots, y_k, x_k, x_{k+1}, x_{k+1})$ есть многочлен k-ой степени от x_k и он обращается в нуль, если положить $x_k = y_\nu$ $(1 \leqslant \nu \leqslant k)$.

Следовательно,

$$T(y_1, \ldots, y_k, x_k, y_{k+1}, x_{k+1}) - \lambda (x_k - y_1) \ldots (x_k - y_k)$$

исчезает при $x_{k+1}=y_{k+1}$. Поэтому

$$T(y_1, \ldots, y_k, x_k, y_{k+1}, x_{k+1})=$$
$$=\lambda(x_k-y_1)\ldots(x_k-y_k)+(x_{k+1}-y_{k+1})g(y_1, \ldots, y_k, x_k, y_{k+1}, x_{k+1}).$$

Наконец, однородный многочлен относительно x_{k+1} и y_{k+1}, k-ой степени, содержащийся в первом члене (8), после подстановки из (6) делится на $x_{k+1}-y_{k-1}$, но не делится на $(x_{k+1}-y_{k+1})^2$. Таким образом, мы получаем нашу лемму.

Лемма 4.5.

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |C_k|^{2(k+1)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \leqslant b_5(k) P^{k+1} L^{2^k-1}.$$

Доказательство. Очевидно, левая часть неравенства в лемме равна числу решений системы

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} x_\nu^h=\sum_{\nu=1}^{k+1} y_\nu^h, \quad 1\leqslant h\leqslant k, \quad 1\leqslant x, \quad y\leqslant P. \tag{10}$$

По лемме 4.3, имеем

$$(x_k-y_1)\ldots(x_k-y_k)=(x_{k+1}-y_{k+1})g(y_1, \ldots, y_k, x_k, y_{k+1}, x_{k+1}). \tag{11}$$

Если $(x_k-y_1)\ldots(x_k-y_k)=0$, то $x_1, \ldots, x_{k+1}$ является перестановкой чисел $y_1, \ldots, y_{k+1}$, и уравнение имеет $O(P^{k+1})$ решений.

Пусть $n=$целое $\neq 0$ и $n=\lambda_1\ldots\lambda_k=\mu_1\mu_2$. Рассмотрим теперь число решений системы

$$x_k-y_\nu=\lambda_\nu \qquad (1\leqslant \nu\leqslant k), \tag{12}$$

$$x_{k+1}-y_{k+1}=\mu_1 \tag{13}$$

и

$$g(y_1, \ldots, y_k, x_k, y_{k+1}, x_{k+1})=\mu_2. \tag{14}$$

Для данных $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2$ и x_k неизвестные $y_1, \ldots, y_k$ однозначно определяются уравнениями (12). Далее, в силу свойств g, по уравнениям (13) и (14) определяется самое большое k системы неизвестных x_{k+1}, y_{k+1}.

Но при данном n число систем $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2$ будет $\leqslant d^k(n)$. При данных $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2$ и x_k число решений системы (10) будет $O(1)$. Следовательно, число решений (10) будет

$$\leqslant \sum_{x_k=1}^{P}\sum_{n}^{P^k} d^k(n) \ll P^{k+1} L^{2^k-1}.$$

4.

Лемма 4.6. Пусть $g_\nu(x)$ — многочлен от x с целыми коэффициентами и

$$g(x) = g_1(x)\alpha_1 + \cdots + g_s(x)\alpha_s$$

— многочлен степени k. Пусть

$$F = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i g(x)}.$$

Тогда, полагая $\Delta^\mu = \underset{y_\mu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta}$, имеем

$$F^{2^\mu} \leqslant P^{2^\mu - 1} + P^{2^\mu - \mu - 1} \sum_{y_1}^{P} \cdots \sum_{y_\mu}^{P} \sum_{x_{\mu+1}}^{P}{}^{*} e(y_1 \ldots y_\mu \Delta^\mu g(x_{\mu+1}))$$

для $\mu = 1, 2, \ldots, k-1$, где $*$ означает условие, что либо

$$y_1 \ldots y_\mu \Delta^\mu g_i(X) = 0$$

тождественно, либо

$$y_1 \ldots y_\mu \Delta^\mu g_i(x_{\mu+1}) \neq 0.$$

Доказательство. Лемма следует из леммы 3.3, так как если $y_1 \ldots y_\mu \Delta^\mu g_i(X)$ не равно тождественно нулю, то число решений уравнения

$$y_1 \ldots y_\mu \Delta^\mu g_i(x_{\mu+1}) = 0$$

будет $\leqslant P^\mu$.

5. Доказательство теоремы

B_2 и B_2' являются непосредственными следствиями леммы 4.5.

Доказательство A_3. По лемме 4.6, имеем

$$|S_3|^4 \leqslant P^3 + P \sum_{y_1}^{P} \sum_{y_2}^{P} \sum_{x_3}^{P}{}^{*} e(y_1 y_2 \Delta^2 (\alpha_3 x_3^3 + \alpha_1 x_3)).$$

Умножая это неравенство на $|S_3|^6$ и интегрируя по α_1 и α_3 от 0 до 1, имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 |S_3|^{10} \, d\alpha_1 \, d\alpha_3 \leqslant P^3 \int_0^1 \int_0^1 |S_3|^6 \, d\alpha_1 \, d\alpha_3 + PR, \qquad (1)$$

где R — число решений системы

$$y_1 y_2 \Delta^2 x_3^3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - z_4^3 - z_5^3 - z_6^3,$$

$$0 = z_1 + z_2 + z_3 - z_4 - z_5 - z_6, \quad z \leqslant P.$$

По лемме 1.2, имеем

$$R \ll \sum_{z_1}^{P} \cdots \sum_{z_5}^{P} d^3 (z_1^3 + \cdots - z_5^3 - (z_1 + \cdots - z_5)^3) \ll P^{5+\varepsilon}.$$

По лемме 4.3 и (1), имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 |S_3|^{10} \, d\alpha_1 \, d\alpha_3 \ll P^{6+\varepsilon}. \tag{2}$$

Доказательство B_3. По лемме 4.6,

$$|C_3|^4 \ll P^3 + P \sum_{y_1}^{P} \sum_{y_2}^{P} \sum_{x_3}^{P} e(y_1 y_2 \Delta^2 (x_3^3 \alpha_3 + x_3^2 \alpha_2)). \tag{3}$$

Умножая это неравенство на $|C_3|^8$ и интегрируя по α_1, α_2, α_3 от 0 до 1, мы получим, на основании леммы 4.5,

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |C_3|^{12} \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 \ll P^{7+\varepsilon} + PR,$$

где R — число решений системы

$$\begin{aligned} y_1 y_2 w &= z_1^3 + \cdots - z_8^3, \\ 2y_1 y_2 &= z_1^2 + \cdots - z_8^2, \\ 0 &= z_1 + \cdots - z_8, \quad z_\nu \ll P, \end{aligned}$$

причем $w = \Delta^2 x_3^3 \ll P$.

По лемме 4.3, для фиксированного w число решений системы

$$2z_1^3 - wz_1^2 + \cdots - (2z_8^3 - wz_8^2) = 0,$$

$$z_1 + \cdots - z_8 = 0$$

будет $\ll P^{5+\varepsilon}$. Так как при фиксированных $z_1, \ldots, z_8$ число значений y_1 и y_2 будет $\ll d(z_1^2 + \cdots - z_8^2) = O(P^\varepsilon)$, то имеем

$$R \ll \sum_{w} P^{5+\varepsilon} \ll P^{6+\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |C_3|^{12} \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 \ll P^{7+\varepsilon}. \tag{4}$$

Умножая (3) на $|C_3|^{12}$ и интегрируя, найдем по (2) и (4),

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |C_3|^{16}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 \ll P^{10+\varepsilon}.$$

Доказательство A_4. По лемме 4.6,

$$|S_4|^8 \ll P^7 + P^4 \sum_{y_1}^{P}\sum_{y_2}^{P}\sum_{y_3}^{P}\sum_{x_4}^{P}{}^{*} e\left(y_1 y_2 y_3 \Delta^3 (x_4^4 \alpha_4 + x_4^2 \alpha_2 + x_4 \alpha_1)\right).$$

Умножая это неравенство на $|S_4|^8$ и интегрируя, получаем по лемме 4.3:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |S_4|^{16}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_4 \ll P^{11+\varepsilon} + P^4 R,$$

где R — число решений системы

$$\begin{aligned} y_1 y_2 y_3 \Delta^3 x_4^4 &= z_1^4 + \cdots - z_8^4, \\ 0 &= z_1^2 + \cdots - z_8^2, \\ 0 &= z_1 + \cdots - z_8, \qquad z \ll P. \end{aligned}$$

Согласно теореме B_2, число систем значений $z_1, \cdots, z_8$, удовлетворяющих последним двум уравнениям, будет $\ll P^{8-3+\varepsilon}$, и, для фиксированных $z_1, \ldots, z_8$ число систем значений y_1, y_2, y_3, x_4 будет $\leqslant d^3(z_1^4 + \cdots - z_8^4) = O(P^\varepsilon)$. Следовательно, $R \ll P^{8-3+\varepsilon} = P^{5+\varepsilon}$. Таким образом,

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |S_4|^{16}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_4 \ll P^{11+\varepsilon}. \tag{5}$$

Повторяя тот же процесс, получаем

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |S_4|^{24}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_4 \ll P^{18+\varepsilon} \tag{6}$$

и

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |S_4|^{32}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_4 \ll P^{25+\varepsilon}. \tag{7}$$

Доказательство B_4. По лемме 4.5, очевидно, имеем

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |C_4|^{10}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3\, d\alpha_4 \ll P^{5+\varepsilon}.$$

По лемме 4.6,

$$|C_4|^4 \ll P^3 + P \sum_{y_1}^{P} \sum_{y_2}^{P} \sum_{x_3}^{P} {}^{*} e(y_1 y_2 \Delta^2 (x_3^4 \alpha_4 + x_3^3 \alpha_3 + x_3^2 \alpha_2 + x_3 \alpha_1)).$$

Умножая это неравенство на $|C_4|^8$ и интегрируя, получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |C_4|^{14} \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 \, d\alpha_4 \ll P^{8+\varepsilon} + PR,$$

где R — число решений системы

$$\begin{aligned} y_1 y_2 \Delta^2 x_3^4 &= z_1^4 + \cdots - z_{10}^4, \\ y_1 y_2 \Delta^2 x_3^3 &= z_1^3 + \cdots - z_{10}^3, \\ 2y_1 y_2 &= z_1^2 + \cdots - z_{10}^2, \\ 0 &= z_1 + \cdots - z_{10}. \end{aligned}$$

Полагаем $\Delta^2 x_3^3 = 2w$ (легко видеть, что w является линейной формой от y_1, y_2 и x_3 с целыми коэффициентами). Для фиксированного w число решений системы

$$\begin{aligned} 0 &= z_1^3 - w z_1^2 + \cdots - (z_{10}^3 - w z_{10}), \\ 0 &= z_1 + \cdots - z_{10} \end{aligned}$$

будет $\ll P^{6+\varepsilon}$, на основании (2). Следовательно, $R \ll P^{7+\varepsilon}$. Таким образом,

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |C_4|^{14} d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 \, d\alpha_4 \ll P^{8+\varepsilon}. \tag{8}$$

По лемме 4.6, имеем

$$|C_4|^8 \ll P^7 + P^4 \sum_{y_1}^{P} \sum_{y_2}^{P} \sum_{y_3}^{P} \sum_{x_4}^{P} {}^{*} e(y_1 y_2 y_3 \Delta^3 (x_4^4 \alpha_4 + x_4^3 \alpha_3 + x_4^2 \alpha_2 + x_4 \alpha_1)). \tag{9}$$

Умножая это неравенство на $|C_4|^{14}$ и интегрируя, найдем

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |C_4|^{22} \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 \, d\alpha_4 \ll P^{15+\varepsilon} + P^4 R,$$

где R — число решений системы

$$\begin{aligned} 6y_1 y_2 y_3 w &= z_1^4 + \cdots - z_{14}^4, \\ 6y_1 y_2 y_3 &= z_1^3 + \cdots - z_{14}^3, \\ 0 &= z_1^2 + \cdots - z_{14}^2, \\ 0 &= z_1 + \cdots - z_{14}, \end{aligned}$$

причем $w=\frac{1}{6}\Delta^3 x_4^4$ есть линейная форма от y_1, y_2, y_3 и x_4 с целыми коэффициентами. Легко видеть, что для фиксированного w R не превосходит числа решений системы

$$z_1^4-wz_1^3+\cdots-(z_{14}^4-wz_{14}^3)=0,$$

$$z_1^2+\cdots-\ z_{14}^2=0,$$

$$z_1+\cdots-\ z_{14}=0,$$

взятого $\ll P^{1+\varepsilon}$ раз.

По лемме 4.3, имеем

$$R\ll P^{1+\varepsilon}P^{14-4+\varepsilon}\ll P^{11+\varepsilon}$$

и

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1|C_4|^{22}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_4\ll P^{15+\varepsilon}. \tag{10}$$

Применяя те же рассуждения с (8) и (9) вместо леммы 4.3, найдем последовательно

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1|C_4|^{22+8\lambda}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_4\ll P^{15+7\lambda+\varepsilon},\qquad \lambda=1,\ 2,\ 3. \tag{11}$$

В дальнейшем мы вводим сокращенную запись

$$\int f\,dx$$

для

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_1^1 f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Доказательство A_5. По лемме 4.6,

$$|S_5|^4\ll P^3+P\sum_{y_1}^{P}\sum_{y_2}^{P}\sum_{x_3}^{P}e(y_1y_2\Delta^2 g(x_3)),$$

где $g(x_3)=x_3^5\alpha_5+x_3^3\alpha_3+x_3^2\alpha_2+x_3$. Умножая это неравенство на $|S_5|^{10}$ и интегрируя, получаем

$$\int|S_5|^{14}\,d\alpha\ll P^8+PR,$$

где R — число решений системы*

* Здесь и в дальнейшем мы не будем повторять определения w.

$$y_1 y_2 \Delta^2 x_3^5 = z_1^5 + \cdots - z_{10}^5,$$
$$2y_1 y_2 w = z_1^3 + \cdots - z_{10}^3,$$
$$2y_1 y_2 = z_1^2 + \cdots - z_{10}^2,$$
$$0 = z_1 + \cdots - z_{10}.$$

Для фиксированного w число решений системы

$$z_1^3 - wz_1^2 + \cdots - (z_{10}^2 - wz_{10}^2) = 0,$$
$$z_1 + \cdots - z_{10} = 0,$$

по A_3, будет $\ll P^{6+\varepsilon}$. Следовательно, $R \ll P^{7+\varepsilon}$. Таким образом,

$$\int |S_5|^{14}\, d\alpha \ll P^{8+\varepsilon}. \tag{12}$$

По лемме 4.6,

$$|S_5|^8 \ll P^7 + P^4 \sum_{y_1}^{P} \sum_{y_2}^{P} \sum_{y_3}^{P} \sum_{x_4}^{P}{}^{*} e(y_1 y_2 y_3 \Delta^3 g(x_4)).$$

Умножая это неравенство на $|S_5|^{14}$ и интегрируя, получаем

$$\int |S_5|^{22}\, d\alpha \ll P^{15+\varepsilon} + P^4 R,$$

где R — число решений системы

$$y_1 y_2 y_3 \Delta^3 x_3^5 = z_1^5 + \cdots - z_{14}^5,$$
$$6y_1 y_2 y_3 = z_1^3 + \cdots - z_{14}^3,$$
$$0 = z_1^2 + \cdots - z_{14}^2,$$
$$0 = z_1 + \cdots - z_{14}.$$

Таким образом, по B_2, $R \ll P^{14-3+\varepsilon}$. Следовательно,

$$\int |S_5|^{22}\, d\alpha \ll P^{15+\varepsilon}.$$

По лемме 4.6,

$$|S_5|^{16} \ll P^{15} + P^{11} \sum_{y_1}^{P} \sum_{y_2}^{P} \sum_{y_3}^{P} \sum_{y_4}^{P} \sum_{x_5}^{P}{}^{*} e(y_1 y_2 y_3 y_4 \Delta^4 g(x_5)).$$

Умножая это неравенство на $|S_5|^{22}$ и интегрируя, получаем по B_3,

$$\int |S_5|^{38}\, d\alpha \ll P^{30+\varepsilon}. \tag{13}$$

Повторяя этот процесс, получаем

$$\int |S_5|^{38+16\lambda}\, d\alpha \ll P^{30+15\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Доказательство B_5. По лемме 4.6, имеем

$$|C_5|^8 \ll P^7 + P^4 \sum_{y_1}^{P} \sum_{y_2}^{P} \sum_{y_3}^{P} \sum_{x_4}^{P}{}^{*} e(y_1 y_2 y_3 \Delta^3 g(x_4)).$$

Умножая это неравенство на $|C_5|^{12}$ и интегрируя, получаем, по лемме 4.5

$$\int |C_5|^{20}\, d\alpha \ll P^{13+\varepsilon} + P^4 R, \tag{15}$$

где R — число решений системы

$$\begin{aligned} y_1 y_2 y_3 \Delta^3 x_3^5 &= z_1^5 + \cdots - z_{12}^5, \\ 6y_1 y_2 y_3 w &= z_1^4 + \cdots - z_{12}^4, \\ 6y_1 y_2 y_3 &= z_1^3 + \cdots - z_{12}^3, \\ 0 &= z_1^2 + \cdots - z_{12}^2, \\ 0 &= z_1 + \cdots - z_{12}. \end{aligned}$$

По лемме 4.5, имеем

$$\int |C_5|^{20}\, d\alpha \ll P^{13+\varepsilon}. \tag{16}$$

Повторяя этот процесс, но используя (5), (6) и (7) вместо леммы 4.5, получим

$$\int |C_5|^{20+8\lambda}\, d\alpha \ll P^{13+7\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Применяя лемму 4.6 с $\mu = 4$ и (10), (11), (12) и (13), получим

$$\int |C_5|^{49+16\lambda}\, d\alpha \ll P^{34+15\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{18}$$

Доказательство A_6. Применяя лемму 4.6 с $\mu = 3$ и лемму 4.3, получим

$$\int |S_6|^{12+8\lambda}\, d\alpha \ll P^{13+\varepsilon}.$$

Повторяя этот процесс и применяя (5), (6) и (7) вместо леммы 4.3, получим:

$$\int |S_6|^{12+8\lambda}\, d\alpha \ll P^{6+7\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, 3, 4. \tag{19}$$

Применяя лемму 4.6 с $\mu = 4$ и B_3, получим

$$\int |S_6|^{60}\, d\alpha \ll P^{49+\varepsilon}. \tag{20}$$

Применяя лемму 4.6 с $\mu=5$ и B_4, получим

$$\int |S_6|^{60+32\lambda}\, d\alpha \ll P^{49+31\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, 3, 4, 5. \tag{21}$$

Доказательство B_6. Аналогично доказательству A_6, имеем

$$\int |C_6|^{16}\, d\alpha \ll P^{9+\varepsilon} \text{ (тривиальное следствие леммы 4.5)},$$

$$\int |C_6|^{16+8\lambda}\, d\alpha \ll P^{9+7\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, 3, \tag{22}$$

$$\int |C_6|^{40+16\lambda}\, d\alpha \ll P^{30+15\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, 3, 4, 5, \tag{23}$$

$$\int |C_6|^{120+32\lambda}\, d\alpha \ll P^{105+31\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, 3, 4, 5, 6. \tag{24}$$

Доказательство A_7. Имеем

$$\int |S_7|^{16}\, d\alpha \ll P^{9+\varepsilon},$$

$$\int |S_7|^{16+8\lambda}\, d\alpha \ll P^{9+7\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, 3, \tag{25}$$

$$\int |S_7|^{40+16\lambda}\, d\alpha \ll P^{30+15\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, 3, 4, 5, \tag{26}$$

$$\int |S_7|^{152}\, d\alpha \ll P^{136+\varepsilon}, \tag{27}$$

$$\int |S_7|^{152+64\lambda}\, d\alpha \ll P^{136+63\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, 3, 4, 5, 6. \tag{28}$$

Доказательство B_7. По лемме 4.5, очевидно, имеем

$$\int |C_7|^{24}\, d\alpha \ll P^{16+\varepsilon}.$$

Далее,

$$\int |C_7|^{24+8\lambda}\, d\alpha \ll P^{16+7\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, \tag{29}$$

$$\int |C_7|^{40+16\lambda}\, d\alpha \ll P^{30+15\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, 3, 4, 5, \tag{30}$$

$$\int |C_7|^{120+32\lambda}\, d\alpha \ll P^{105+31\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, 3, 4, 5, 6, \tag{31}$$

$$\int |C_7|^{312+64\lambda}\, d\alpha \ll P^{291+63\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \tag{32}$$

Доказательство A_8. По лемме 4.6 с $\mu=4$ и по (8), имеем

$$\int |S_8|^{32}\, d\alpha \ll P^{23+\varepsilon}. \tag{33}$$

Далее, по лемме 4.6 с $\mu=3$ и по A_4,

$$\int |S_8|^{40}\, d\alpha \ll P^{30+\varepsilon}. \tag{34}$$

Аналогично предыдущему методу, получим

$$\int |S_8|^{40+16\lambda}\, d\alpha \ll P^{30+15\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \tag{35}$$

$$\int |S_8|^{120+32\lambda}\, d\alpha \ll P^{105+31\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \tag{36}$$

$$\int |S_8|^{376}\, d\alpha \ll P^{354+\varepsilon}, \tag{37}$$

$$\int |S_8|^{376+128\lambda}\, d\alpha \ll P^{354+127\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \tag{38}$$

Доказательство B_8. Имеем

$$\int |C_8|^{18+16\lambda}\, d\alpha \ll P^{9+15\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \tag{39}$$

$$\int |C_8|^{114+32\lambda}\, d\alpha \ll P^{99+31\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \tag{40}$$

$$\int |C_8|^{306+64\lambda}\, d\alpha \ll P^{285+63\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \tag{41}$$

$$\int |C_8|^{754+128\lambda}\, d\alpha \ll P^{726+127\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8. \tag{42}$$

Доказательство A_9. Имеем

$$\int |S_9|^{18+16\lambda}\, d\alpha \ll P^{9+15\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=0,\ 1,\ldots,\ 6, \tag{43}$$

$$\int |S_9|^{114+32\lambda}\, d\alpha \ll P^{99+31\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1,\ 2,\ldots,\ 6, \tag{44}$$

$$\int |S_9|^{306+64\lambda}\, d\alpha \ll P^{285+63\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1,\ 2,\ldots,\ 7, \tag{45}$$

$$\int |S_9|^{754+128\lambda}\, d\alpha \ll P^{726+127\lambda+\varepsilon}, \tag{46}$$

$$\int |S_9|^{882+256\lambda}\, d\alpha \ll P^{853+255\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1,\ 2,\ldots,\ 8. \tag{47}$$

Доказательство B_9. Имеем

$$\int |C_9|^{20+16\lambda}\, d\alpha \ll P^{10+15\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=0,\ 1,\ldots,\ 5, \tag{48}$$

$$\int |C_9|^{100+32\lambda}\, d\alpha \ll P^{85+31\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1,\ 2,\ldots,\ 6, \tag{49}$$

$$\int |C_9|^{292+64\lambda}\, d\alpha \ll P^{271+63\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda=1,\ 2,\ldots,\ 7, \tag{50}$$

$$\int |C_9|^{740+128\lambda}\, d\alpha \ll P^{712+127\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 8, \tag{51}$$

$$\int |C_9|^{1764+256\lambda}\, d\alpha \ll P^{1728+255\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 9. \tag{52}$$

Доказательство A_{10}. Имеем

$$\int |S_{10}|^{20+16\lambda}\, d\alpha \ll P^{10+15\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 0, 1, \ldots, 5, \tag{53}$$

$$\int |S_{10}|^{100+32\lambda}\, d\alpha \ll P^{85+31\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 6, \tag{54}$$

$$\int |S_{10}|^{292+64\lambda}\, d\alpha \ll P^{271+63\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 7, \tag{55}$$

$$\int |S_{10}|^{740+128\lambda}\, d\alpha \ll P^{712+127\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 8, \tag{56}$$

$$\int |S_{10}|^{1764+256\lambda}\, d\alpha \ll P^{1728+255\lambda+\varepsilon}, \tag{57}$$

$$\int |S_{10}|^{2020+512\lambda}\, d\alpha \ll P^{1983+511\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 9. \tag{58}$$

Доказательство B_{10}. Имеем, очевидно,

$$\int |c_{10}|^{38}\, d\alpha \ll P^{27+\varepsilon}.$$

Далее, имеем

$$\int |C_{10}|^{38+16\lambda}\, d\alpha \ll P^{27+15\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 4, \tag{59}$$

$$\int |C_{10}|^{102+32\lambda}\, d\alpha \ll P^{87+31\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 6, \tag{60}$$

$$\int |C_{10}|^{294+64\lambda}\, d\alpha \ll P^{259+63\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 7, \tag{61}$$

$$\int |C_{10}|^{742+128\lambda}\, d\alpha \ll P^{714+127\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 8, \tag{62}$$

$$\int |C_{10}|^{1766+256\lambda}\, d\alpha \ll P^{1730+255\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 9, \tag{63}$$

$$\int |C_{10}|^{4070+512\lambda}\, d\alpha \ll P^{4025+511\lambda+\varepsilon}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, 10. \tag{64}$$

ГЛАВА V

Теорема Виноградова о среднем значении и ее следствия

1. Формулировка теоремы

В этой главе излагаются наиболее известная теорема и её следствия, принадлежащие И. М. Виноградову. Эта теорема является основным принципом новейших исследований аналитической теории чисел.

Теорема 7 (Теорема Виноградова о среднем значении). Пусть

$$f(x)=\alpha_k x^k+\cdots+\alpha_1 x$$

и

$$C_k=\sum_{x=1}^{P} e(f(x)).$$

Тогда для $b=b(k)=2b_1=2\left[\frac{1}{4}(k+1)(k+2)\right]$ и $k\leqslant n\leqslant c_1(k)$ мы имеем

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 |C_k|^{bn}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_k\leqslant c_2(k)\,P^{bn-\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)\sigma},$$

где $\sigma=(1-a)^n$, $a=\frac{1}{k}\cdot$

Теорема может быть сформулирована в несколько иной форме.

Число решений системы диофантовых уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{r} x_\nu^h-\sum_{\nu=r+1}^{bn} y_\nu^h=N_h,\quad 1\leqslant h\leqslant k,\quad 1\leqslant x,\ y\leqslant P,$$

где r — любое целое число $\leqslant bn$, будет

$$\leqslant c_2(k)\,P^{bn-\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)\sigma}$$

Доказательство теоремы существенно зависит от леммы 5.1, доказательство которой упрощено и уточнено автором.

2. Леммы

Лемма 5.1. Пусть $P=RH$, $R>1$, $H>1$ и

$$1\leqslant g_1<g_2<\ldots<g_k\leqslant H,\quad g_\nu-g_{\nu-1}>1,$$

причем $g_1,\ldots,g_k$ — целые числа. Пусть x_ν — переменная, лежащая в интервале

$$-\omega+(g_\nu-1)R\leqslant x_\nu<-\omega+g_\nu R,\quad |\omega|\leqslant P.$$

Тогда число систем целых чисел $x_1,\ldots,x_k$, для которых выражения

$$x_1^h+\ldots+x_k^h,\quad 1\leqslant h\leqslant k \tag{1}$$

лежат соответственно в определенных интервалах длины $\leqslant P^{h-1}$ $(1\leqslant h\leqslant k)$, будет

$$\leqslant(2kH)^{\frac{1}{2}k(k-1)}.$$

Доказательство. Лемма очевидна для $k=1$. Допустим, что она верна для $k-1$. Пусть $x_1,\ldots,x_k$ и $y_1,\ldots,y_k$ две системы целых чисел, причем обе удовлетворяют требованиям леммы. Пусть $s_h=\sum\limits_{\nu=1}^{k}x_\nu^h$, $s_\nu'=\sum\limits_{\nu=1}^{k}y_\nu^k$ и пусть σ_h и σ_h' являются соответственно h-ми элементарными симметрическими функциями от $x_1,\ldots,x_k$ и от $y_1,\ldots,y_k$. Тогда, по условиям леммы, имеем

$$|s_h-s_h'|\leqslant P^{h-1},\quad 1\leqslant h\leqslant k. \tag{2}$$

Мы можем вывести из (2), что

$$|\sigma_h-\sigma_h'|\leqslant(2kP)^{h-1},\quad 1\leqslant h\leqslant k. \tag{3}$$

Действительно, (3) очевидно для $h=1$. Предположим, что (3) справедливо для $1, 2,\ldots, h-1$. По известной теореме о симметрических функциях имеем

$$s_h-\sigma_1 s_{h-1}+\sigma_2 s_{h-2}-\cdots-(-1)^h h\sigma=0$$

и

$$s_h'-\sigma_1' s_{h-1}'+\sigma_2' s_{h-2}'-\cdots-(-1)^h h\sigma_h'=0.$$

Так как $|\sigma_\nu|\leqslant\binom{k}{\nu}P^\nu$, $|s_\nu|\leqslant kP^\nu$, то для $1\leqslant\nu<h$ имеем

$$|\sigma_\nu s_{h-\nu}-\sigma_\nu' s_{h-\nu}'|\leqslant|\sigma_\nu-\sigma_\nu'||s_{h-\nu}|+|\sigma_\nu'||s_{h-\nu}-s_{h-\nu}'|\leqslant$$

$$\leqslant\left((2k)^{\nu-1}k+\binom{k}{\nu}\right)P^{h-1}\leqslant$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{\nu!}\right)(2k)^{\nu-1}kP^{h-1}.$$

Тогда для $k\geqslant 2$

$$|\sigma_h-\sigma_h'|\leqslant\frac{1}{h}\left(1+2k+\frac{3}{2}k\sum_{\nu=2}^{h-1}(2k)^{\nu-1}\right)P^{h-1}\,{}^{*}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}k\frac{(2k)^{h-1}}{2k-1}\right)P^{h-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3}{4}(2k)^{h-1}P^{h-1}.$$

Следовательно, для $|X|\leqslant P$, имеем

$$\Psi(X)=|(X-x_1)\cdots(X-x_k)-(X-y_1)\cdots(X-y_k)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{h=1}^{k}|\sigma_h-\sigma_h'||X|^{k-h}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3}{4}\sum_{h=1}^{k}(2k)^{h-1}P^{k-1}=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{(2k)^k}{2k-1}P^{k-1}.$$

Так как $|y_k-x_\nu|\geqslant R$ для $\nu=1, 2, \ldots, k-1$, то

$$R^{k-1}|y_k-x_k|\leqslant|(y_k-x_1)(y_k-x_2)\cdots(y_k-x_k)|=\Psi(y_k)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3}{4}\frac{(2k)^k}{2k-1}P^{k-1}\leqslant(2kP)^{k-1}.$$

Следовательно, число значений x_k, удовлетворяющих (1), $\leqslant(2kH)^{k-1}$. Далее, для фиксированного x_k числа

$$x_1^h+\cdots+x_{k-1}^h,\quad 1\leqslant h\leqslant k-1$$

лежат соответственно в интервалах длин $\leqslant P^{h-1}$ $(1\leqslant h\leqslant k-1)$. По предположению индукции, число систем $x_1, \ldots, x_{k-1}$ будет

$$\leqslant(2(k-1)H)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}.$$

---

* Для $h=2$ $\sum\limits_{\nu=2}^{1}$ означает нуль.

Таким образом, мы получаем нашу лемму, так как

$$(2(k-1)H)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}(2kH)^{k-1} \leqslant (2kH)^{\frac{1}{2}k(k-1)}.$$

Лемма 5.2. Если в лемме 5.1 заменить (1) через

$$\zeta_1 x_1^h + \ldots + \zeta_k x_k^h, \quad 1 \leqslant h \leqslant k, \quad \zeta_i = \pm 1,$$

то лемма также справедлива.

Доказательство. Неравенства (2) в доказательстве леммы 5.1 теперь заменяются через

$$|\zeta_1 x_1^h + \cdots + \zeta_k x_k^h - (\zeta_1 y_1^h + \cdots + \zeta_k y_k^h)| \leqslant P^{h-1}, \quad 1 \leqslant h \leqslant k.$$

Мы заменяем x_i через y_i, а y_i через x_i, если $\zeta_i = -1$, тогда получаем систему неравенств того же вида, что и (2).

Лемма 5.3. Система целых чисел $(g_1, \ldots, g_b)$ $(1 \leqslant g \leqslant H)$ называется правильной,* если имеется (по меньшей мере) k из них, например $j_1, \ldots, j_k$, удовлетворяющих неравенствам

$$j_{\nu+1} - j_\nu > 1, \quad 1 \leqslant \nu < k.$$

Число неправильных систем, для которых $1 \leqslant g \leqslant H$, будет

$$\leqslant b!\, 3^b H^{k-1}.$$

Доказательство. Мы располагаем $(g_1 \ldots g_b)$ следующим образом:

$$1 \leqslant g_1' \leqslant g_2' \leqslant \ldots \leqslant g_b'.$$

Пусть $g'_{\nu+1} - g'_\nu = f_\nu$. Если система неправильна, то имеется самое большее $k-2$ значений f, удовлетворяющих условиям $f_\nu > 1$.

Теперь рассмотрим системы, имеющие в точности σ $(0 \leqslant \sigma \leqslant k)$ значений f с $f_\nu > 1$. Число различных расположений этих σ значений f будет $\binom{b-1}{\sigma}$. Таким образом, число различных систем будет

$$\leqslant \binom{b-1}{\sigma} H^{\sigma+1} 2^{b-1-\sigma},$$

так как $0 \leqslant f_\nu \leqslant H-1$ и $1 \leqslant g'_1 \leqslant H$. Поэтому общее число неправильных систем $g_1' \ldots g'_b$ будет

$$\leqslant \sum_{\sigma=0}^{k-2} \binom{b-1}{\sigma} H^{\sigma+1} 2^{b-\sigma-1} \leqslant (1+2)^{b-1} H^{k-1} \leqslant 3^b H^{k-1}.$$

Получаем лемму, так как число систем $(g_1, \ldots, g_b)$, соответствующих $(g'_1, \ldots, g'_b)$, будет $\leqslant b!$.

---

* Автор употребляет термин „well-spaced set". — Прим. ред.

3. Доказательство теоремы

1) Пусть $R_{2s}=R_{2s}(P)$ означает число решений системы диофантовых уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^h=\sum_{\nu=1}^{s} y_\nu^h,\quad 1\leqslant h\leqslant k,\quad 1\leqslant x,y\leqslant P(=P_1). \tag{1}$$

Для доказательства теоремы 7 достаточно установить, что для

$$P\geqslant (n-1)^{k(1-a)^{1-n}}$$

имеем

$$R_{bn}(P)\leqslant \left(ck^2 n^{\frac{k}{b}}\right)^{nb} P^{nb-\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)\sigma},$$

где $\sigma=(1-a)^n$ и c — абсолютное постоянное.

Пусть r_{bn} означает число решений системы

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{b_1} x_{is}^h=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{b_1} y_{is}^h,\quad 1\leqslant h\leqslant k,\quad b=2b_1, \tag{2}$$

$$-\omega_i\leqslant x_{is},\ \ y_{is}\leqslant P_i-\omega_i,\quad |\omega_i|\leqslant P_i,$$

где

$$P_i=P_1^{(1-a)^{i-1}}.$$

Лемма 5.4. Имеем

$$R_{bn}\leqslant (eP_1)^{bn}(P_1\cdots P_n)^{-b}\max_{\omega} r_{bn}.$$

Доказательство. Имеем

$$R_{bn}=\int_0^1\cdots\int_0^1 |S_1|^{bn}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_k,$$

где

$$S_1=\sum_{x=1}^{P_1} e(f(x)),\quad f(x)=\alpha_k x^k+\cdots+\alpha_1 x.$$

Разделим интервал $0<x\leqslant P$ на $q_2=[P_1/P_2]+1$ части, каждая из которых имеет вид

$$\beta<x\leqslant\beta+P_2',\quad 0<P_2'\leqslant P_2$$

(P_1/P_2 равных частей и одна неполная часть). Разделим снова предыдущий интервал на $q_3=[P_2/P_3]+1$ частей, каждая длины $\leqslant P_3$, и т. д.

Пусть

$$S_i=\sum e(f(x)),$$

где суммирование распространено на один из частных интервалов после $(t-1)$-го деления. Тогда

$$S_t = \sum^{q_{t+1}} S_{t+1},$$

где $\sum^{q_{t+1}}$ означает сумму q_{t+1} слагаемых S_{t+1}. В частности,

$$S_1 = \sum^{q_2} S_2.$$

При помощи неравенства Hölder'а имеем

$$|S_1|^{bn} = |S_1|^b |S_1|^{b(n-1)} = |S_1|^b \left(\sum^{q_2} |S_2|\right)^{b(n-1)} \leqslant$$

$$\leqslant |S_1|^b q_2^{b(n-1)-1} \sum^{q_2} |S_2|^{b(n-1)}$$

и, аналогично,

$$|S_2|^{b(n-1)} \leqslant |S_2|^b q_3^{b(n-2)-1} \sum^{q_3} |S_3|^{b(n-2)} \text{ и т. д.}$$

Таким образом,

$$|S_1|^{bn} \leqslant q_2^{b(n-1)-1} q_3^{b(n-2)-1} \ldots q_n^{b-1} \sum K,$$

где суммирование распространяется на $q_2 \ldots q_n$ сумм, каждая из которых имеет вид

$$K = |S_1 \cdots S_n|^b.$$

Заметим, что интервал суммы S_{t+1} является частичным интервалом интервала суммы S_t. Поэтому существует целое W (т. е. любое целое, лежащее во всех рассматриваемых интервалах) такое, что интеграл

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S_1 \ldots S_n|^b \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k$$

равен числу решений системы

$$\sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{b_t} x_{ts}^h = \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{b_t} y_{ts}^h, \quad 1 \leqslant h \leqslant k,$$

$$W - \omega_t \leqslant x_{ts}, \quad y_{ts} \leqslant W - \omega_t + P_t, \quad |\omega_t| \leqslant P_t.$$

При помощи подстановки $x_{ts} - W = x'_{ts}$, $y_{ts} - W = y'_{ts}$ убеждаемся в том, что этот интеграл при определенных ω_t равен r_{bn}.

Так как

$$q_2^{b(n-1)-1} q_3^{b(n-2)-1} \dots q_n^{b-1} \cdot q_2 \dots q_n = (q_2^{n-1} q_3^{n-2} \dots q_n)^b \leqslant$$

$$\leqslant P_1^{bn} (P_1 \dots P_n)^{-b} \left(\left(1 + \frac{1}{P_1^a}\right)^{n-1} \dots \left(1 + \frac{1}{P_{n-1}^a}\right) \right)^b$$

и

$$(n-1)\log\left(1+\frac{1}{P_1^a}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{1}{P_{n-1}^a}\right) \leqslant \frac{n-1}{P_1^a} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{P_{n-1}^a} \leqslant n\frac{n-1}{P_{n-1}^a} \leqslant n,$$

то мы получаем лемму.

2) Пусть

$$X_t^{(h)} = \sum_{s=1}^{b_1} x_{ts}^{h}, \quad Y_t^{(h)} = \sum_{s=1}^{b_1} y_{ts}^{h}.$$

Тогда (2) можно переписать в виде

$$\sum_{t=1}^{n} X_t^{(h)} = \sum_{t=1}^{n} Y_t^{(h)}, \quad 1 \leqslant h \leqslant k.$$

Очевидно,

$$|X_t^{(h)}| \leqslant b_1 P_t^h, \quad |Y_t^{(h)}| \leqslant b_1 P_t^h.$$

Пусть Φ_t — число систем $x_{t,1}, \dots, x_{t,b_1}; y_{t,1}, \dots, y_{t,b_1}$ таких, что $X_t^{(h)} - Y_t^{(h)}$ лежат соответственно в интервалах длины $\leqslant b_1 n P_t^{h(1-a)} (1 \leqslant h \leqslant k)$. Тогда

$$r_{bn} \leqslant \Phi_1 \dots \Phi_n. \tag{3}$$

Действительно, для данных $x_{\nu s}$, $y_{\nu s} (1 \leqslant \nu \leqslant t-1,\ 1 \leqslant s \leqslant b_1)$, имеем

$$|X_t^{(h)} - Y_t^{(h)} + X_1^{(h)} - Y_1^{(h)} + \dots + X_{t-1}^{(h)} - Y_{t-1}^{(h)}| \leqslant$$

$$\leqslant b_1 (P_{t+1}^h + P_{t+2}^h + \dots + P_n^h) \leqslant$$

$$\leqslant n b_1 P_t^{h(1-a)}.$$

Таким образом, число систем целых чисел $x_{t,1}, \dots, x_{t,b_1}; y_{t,1}, \dots, y_{t,b_1}$ равно Φ_t Следовательно, мы получаем (3).

3) Оценим теперь Φ_t. Для простоты мы временно будем пропускать индекс t. Именно, мы будем оценивать Φ, которое является числом систем x, y таких, что

$$X^{(h)} - Y^{(h)} = \sum_{s=1}^{b_1} x_s^{h} - \sum_{s=1}^{b_1} y_s^{h} \quad (-\omega \leqslant x_s,\ y_s \leqslant P - \omega,\ |\omega| \leqslant P)$$

лежат соответственно в интервалах длины $\leqslant nb_1 P^{h(1-a)}$ $(1 \leqslant h \leqslant k)$. Мы будем пользоваться также обозначением $y_s = x_{b_1+s}$. Делим интервал

$$-\omega \leqslant x_s \leqslant P - \omega, \quad 1 \leqslant s \leqslant b$$

на 2^τ равных частей, каждая из которых имеет вид

$$-\omega + (g_v - 1) R_\tau < x_{\tau v} \leqslant -\omega + g_v R_\tau,$$

где $R_\tau = P2^{-\tau}$. Будем называть это τ-м делением. Пусть

$$\tau_0 = [a \log P/\log 2] + 1 \text{ и } \tau \leqslant \tau_0.$$

Тогда

$$R_\tau \geqslant P2^{-\tau_0} \geqslant \frac{1}{2} P^{1-a} > 1.$$

После τ-го деления мы имеем $2^{b\tau}$ систем частичных интервалов, и каждая из этих систем приведена в соответствие с системой целых чисел

$$g_1, \ldots, g_b, \; g_v \leqslant 2^\tau.$$

По лемме 5.3, число неправильных систем после τ-го деления будет

$$\leqslant b!\, 3^b 2^{\tau(k-1)}.$$

После первого деления число правильных систем будет

$$\leqslant 2^b = 2^{b+(1-1)k}.$$

Разделим каждый интервал неправильной системы (число их $\leqslant b!\, 3^b 2^{k-1}$) на две части. Очевидно, число правильных систем, возникающих от вышеуказанных неправильных систем, после такого деления будет $\leqslant b!\, 3^b 2^{k-1+b}$. Число неправильных систем после $(\tau - 1)$-го деления будет

$$\leqslant b!\, 3^b 2^{(\tau-1)(k-1)}.$$

Мы снова делим каждый интервал на две части, тогда число правильных систем после такого повторного деления будет $\leqslant b!\, 3^b 2^{(\tau-1)(k-1)+b}$. Эти правильные системы мы будем обозначать W_τ (Заметим, что W_τ образовано при помощи $\leqslant b!\, 3^b 2^{(\tau-1)(k-1)+b}$ правильных систем интервалов).

Пусть $\Phi^{(\tau)}$ означает общее число систем x, y, для которых

$$X^{(h)} - Y^{(h)}, \quad -\omega + (g_v - 1) R_\tau \leqslant x_v \leqslant -\omega + g_v R_\tau \tag{4}$$

лежат в интервалах длины $\leqslant b_1 n P^{h(1-a)}$, где числа g пробегают системы W_τ.

Далее, пусть $\Psi^{(\tau)}$ означает общее число систем x, y, для которых разности (4) лежат в интервалах длины $\leqslant b_1 n P^{h(1-a)}$, где числа g пробегают все неправильные системы, получаемые после τ-го деления.

Следовательно,

$$\Phi \leqslant \sum_{\tau \leqslant \tau_0} \Phi^{(\tau)} + \Psi^{(\tau_0)}.$$

4) По лемме 5.2, число систем целых чисел x, y таких, что

$$X^{(h)}-Y^{(h)}=x_1^h+\ldots+x_{b_1}^h-x_{b_1+1}^h-\ldots-x_b^h,$$

$$-\omega+(g_v-1)R_\tau\leqslant x_v\leqslant-\omega+g_vR_\tau$$

лежат в интервалах длины $\leqslant P^{h-1}$, где числа g образуют систему, принадлежащую к W_τ, будет

$$\leqslant(2k\cdot 2^\tau)^{\frac{1}{2}k(k-1)}([R_\tau]+1)^{b-k}\leqslant$$

$$\leqslant(2^{\tau+1}k)^{\frac{1}{2}k(k-1)}2^{b-k}R_\tau^{b-k}\leqslant$$

$$\leqslant 8^bk^{\frac{1}{2}k(k-1)}2^{\tau\left(\frac{1}{2}k(k-1)-b\right)}P^{b-k}.$$

Делим систему интервалов длины $\leqslant b_1nP^{h(1-a)}\,(1\leqslant h\leqslant k)$ на

$$\frac{nb_1P^{1-a}}{1}\,\frac{nb_1P^{2(1-a)}}{P}\cdots\frac{nb_1P^{k(1-a)}}{P^{k-1}}=\frac{(nb_1)^kP^{\frac{1}{2}k(k+1)(1-a)}}{P^{\frac{1}{2}k(k-1)}}=(nb_1)^kP^{\frac{1}{2}(k-1)}$$

систем интервалов длины $\leqslant P^{h-1}\,(1\leqslant h\leqslant k)$. Таким образом, для системы интервалов W_τ, (4) имеет самое большее

$$(nb_1)^kP^{\frac{1}{2}(k-1)}\,8^b\cdot 2^{\tau\left(\frac{1}{2}k(k+1)-b\right)}P^{b-k}$$

систем x, y. Так как в W_τ число систем

$$\leqslant b!\,3^b2^{(\tau-1)(k-1)+b},$$

то

$$\Phi^{(\tau)}\leqslant b!\,3^b\cdot 2^{(\tau-1)(k-1)+b}(nb_1)^k8^b2^{\tau\left(\frac{1}{2}k(k+1)-b\right)}P^{b-\frac{1}{2}(k+1)}=$$

$$=b!\,(nb_1)^k24^b\cdot 2^{\tau\left(\frac{1}{2}k(k+1)-b\right)}P^{b-\frac{1}{2}(k+1)}.$$

Далее, мы имеем, очевидно,

$$\Psi^{(\tau_0)}\leqslant b!\,3^b\cdot 2^{(\tau_0-1)(k-1)+b}R_{\tau_0}^b\leqslant$$

$$\leqslant b!\,3^b2^{b-k+1}P^b2^{\tau_0(k-1-b)}\leqslant$$

$$\leqslant b!\,3^b2^{b-k+1}2^{\tau_0\left(\frac{1}{2}k(k+1)+k-1-b\right)}P^{b-\frac{1}{2}(k+1)},$$

так как $2^{\tau_0}\geqslant P^a$.

Заметив, что

$$\frac{1}{2}k(k+1)+k-1-b<0,$$

находим:

$$\Phi = \sum_{\tau \leqslant \tau_0} \Phi^{(\tau)} + \Psi^{(\tau_0)} \leqslant$$

$$\leqslant b!\, 24^b (nb_1)^k P^{b - \frac{1}{2}(k+1)} \left(\sum_{\tau \leqslant \tau_0} 2^{-\tau} + 2^{\tau_0} \right) \leqslant$$

$$\leqslant b!\, 24^b (nb_1)^k P^{b - \frac{1}{2}(k+1)}.$$

5) Возвращаясь к нашему старому обозначению из 3), имеем

$$\Phi_i \leqslant b!\, (nb_1)^k 24^b P_i^{b - \frac{1}{2}(k+1)},$$

и при помощи (3) находим

$$r_{bn} \leqslant (b!\, (nb_1)^k 24^b)^n (P_1 \ldots P_n)^{b - \frac{1}{2}(k+1)}.$$

По лемме 5.4, получаем

$$R_{bn} \leqslant (e^b b!\, (nb_1)^k 24^b)^n P_1^{bn} (P_1 \ldots P_n)^{-\frac{1}{2}(k+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(ck^2 n^{\frac{k}{b}} \right)^{nb} P^{bn - \frac{1}{2} k (k+1)(1-a)^n}.$$

Замечание. Из доказанного следует, что если $n = o(e^k)$, то предыдущее неравенство принимает вид

$$R_{bn} \leqslant (c' k^2)^{nb} P^{nb - \frac{1}{2} k (k+1) + \frac{1}{2} k (k+1) \sigma}$$

для $P \geqslant (n-1)^{k(1-a)^{1-n}}$.

4. Первое следствие теоремы

Теорема 8. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми значениями степени k; тогда

$$\int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x) \alpha} \right|^{bn} d\alpha \leqslant c_3(k) P^{bn - k + \frac{1}{2} k (k+1) \sigma},$$

где

$$b = 2\left[\frac{1}{4}(k+1)(k+2)\right], \quad k \leqslant n < c_4(k), \quad \sigma = (1-a)^n.$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4 (глава III), мы можем предположить, что $f(x)$ есть многочлен с целыми коэффициентами. Пусть

$$f(x) = A_k x^k + \ldots + A_1 x + A_0.$$

Число решений уравнения

$$f(x_1)+\ldots+f(x_{b_1n})=f(y_1)+\ldots+f(y_{b_1n}),\quad 1\leqslant x,\quad y\leqslant P$$

не превосходит числа решений системы

$$x_1^h+\ldots+x_{b_1n}^h-y_1^h-\ldots-y_{b_1n}^h=N_h,\quad 1\leqslant h\leqslant k, \tag{1}$$

где числа N удовлетворяют условиям

$$A_kN_k+\ldots+A_1N_1=0,\quad N_h\ll P^h. \tag{2}$$

Так как $N_k\ll P^k$, то имеется

$$\ll P^{1+2+\cdots+k-1}=P^{\frac{1}{2}(k-1)k}$$

систем $N_1,\ldots,N_k$, удовлетворяющих (2). Действительно, N_k определяется однозначно при заданных $N_h (1\leqslant h\leqslant k-1)$.

Для фиксированных $N_1,\ldots,N_{k-1}$ и N_k число решений (1) равно

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\left|\sum_{x=1}^{P}e(\alpha_kx^k+\ldots+\alpha_1x)\right|^{bn}e(-(N_k\alpha_k+\ldots+N_1\alpha_1))\,d\alpha_1\ldots d\alpha_k.$$

По теореме 7, этот интеграл будет

$$\leqslant\int_0^1\cdots\int_0^1\left|\sum_{x=1}^{P}e(\alpha_kx^k+\ldots+\alpha_1x)\right|^{bn}d\alpha_1\ldots d\alpha_k\ll$$

$$\ll P^{bn-\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)\sigma}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1\left|\sum_{x=1}^{P}e(f(x)\alpha)\right|^{bn}d\alpha\ll P^{bn-k+\frac{1}{2}k(k+1)\sigma}.$$

5. Второе следствие из теоремы

Лемма 5.5. Пусть $\alpha_k,\ldots,\alpha_1$ — вещественные числа и пусть

$$S=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi if(x)},\quad f(x)=\alpha_kx^k+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0,$$

$$\left|\alpha_k-\frac{h}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2},\quad (h,q)=1,\quad q>0,\quad P\leqslant q;$$

тогда для любого положительного целого $p_1\leqslant P$ имеем

$$S\leqslant c_5(k,\varepsilon)P\left(P^{-1}p_1^{\frac{1}{2}k(k-1)\sigma'}(1+qp_1^{-k+1}\log q)\right)^{\frac{1}{2b'n}}+p_1,$$

где
$$n > k-1, \quad \sigma' = \left(1 - \frac{1}{k-1}\right)^n$$
и
$$b' = 2\left(\left[\frac{1}{8}k(k+1)\right] + 1\right).$$

Доказательство. Пусть
$$S_1(y) = S_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i f(x+y)},$$
тогда
$$\sum_{y=1}^{P}\sum_{x=1}^{p_1} e(f(x+y)) = p_1 \sum_{m=p_1}^{P} e(f(m) + \left(\sum_{m=2}^{p_1-1} + \sum_{m=P}^{P+p_1}\right) O(p_1) =$$
$$= p_1 S + O(p_1^2),$$
т. е.
$$S = \frac{1}{p_1}\sum_{y=1}^{P} S_1 + O(p_1).$$
Пусть
$$f(x+y) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \ldots + A_0,$$
тогда
$$A_k = \alpha_k, \quad A_{k-1} = \alpha_{k-1} + k\alpha_k y, \ \ldots$$

По неравенству Hölder'а, имеем
$$S \leqslant \frac{1}{p_1}\left(P^{b'n-1}\sum_y |S_1|^{b'n}\right)^{\frac{1}{b'n}} + p_1.$$

Далее,
$$|S_1|^{b'n} = \sum_{x_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{x_{\frac{1}{2}b'n}=1}^{p_1} \sum_{x_1'=1}^{p_1} \cdots \sum_{x'_{\frac{1}{2}b'n}=1}^{p_1} e^{2\pi i \Phi},$$
где
$$\Phi = f(x_1+y) + \ldots + f\left(x_{\frac{1}{2}b'n} + y\right) - f(x_1'+y) - \ldots - f\left(x'_{\frac{1}{2}b'n} + y\right) =$$
$$= A_k\left(x_1^k + \ldots + x^k_{\frac{1}{2}b'n} - x_1'^k - \ldots - x^k_{\frac{1}{2}b'n}\right) +$$
$$+ A_{k-1}\left(x_1^{k-1} + \ldots + x^{k-1}_{\frac{1}{2}b'n} - x_1'^{k-1} - \ldots - x'^{k-1}_{\frac{1}{2}b'n}\right).$$

Пусть $\psi(N_1, \ldots, N_{k-1})$ означает число решений системы
$$x_1^h + \ldots + x^h_{\frac{1}{2}b'n} - x_1'^h - \ldots - x^h_{\frac{1}{2}b'n} = N_h, \quad 1 \leqslant h \leqslant k-1,$$
$$1 \leqslant x, \quad x' \leqslant p_1.$$

Таким образом,

$$\sum_y |S_1|^{b'n} \leqslant \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{\frac{1}{2}b'n}} \sum_{x_1'} \cdots \sum_{x'_{\frac{1}{2}b'n}} \left| \sum_y e^{2\pi i \Phi} \right| =$$

$$= \sum_{N_1}^{p_1} \cdots \sum_{N_{k-1}}^{p_1^{k-1}} \psi(N_1, \ldots, N_{k-1}) \left| \sum_y e(A_{k-1} N_{k-1} + \ldots + A_1 N_1) \right|$$

$$= \sum_{N_1}^{p_1} \cdots \sum_{N_{k-1}}^{p_1^{k-1}} \psi(N_1, \ldots, N_{k-1}) \left| \sum_y e(A_{k-1} N_{k-1} + \ldots + A_1 N_1) \right|,$$

так как A_k не зависит от y.

По неравенству Cauchy имеем

$$\sum_y |S_1|^{b'n} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{N_1}^{p_1} \cdots \sum_{N_{k-1}}^{p_1^{k-1}} \psi^2(N_1, \ldots, N_{k-1}) \sum_{N_1}^{p_1} \cdots \sum_{N_{k-1}}^{p_1^{k-1}} \left| \sum_y e(A_{k-1} N_{k-1} + \ldots + A_1 N_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Во-первых,

$$\sum_{N_1}^{p_1} \cdots \sum_{N_{k-1}}^{p_1^{k-1}} \psi^2(N_1, \ldots, N_{k-1}) \quad (2)$$

равно числу решений системы

$$x_1^h + \ldots + x^h_{\frac{1}{2}b'n} - x_1'^h - \ldots - x'^h_{\frac{1}{2}b'n} =$$

$$= z_1^h + \ldots + z^h_{\frac{1}{2}b'n} - z_1'^h - \ldots - z'^h_{\frac{1}{2}b'n}, \quad 1 \leqslant h \leqslant k-1.$$

Таким образом, (2) не превосходит

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_x^{p_1} e(\alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x) \right|^{2b'n} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k.$$

Так как

$$2b' = 4\left(\left[\frac{1}{8}k(k+1)\right] + 1\right) \geqslant 2\left[\frac{1}{4}k(k+1)\right] \ (= b(k-1) \text{ в теореме } 7),$$

то, по теореме 7,

$$\sum_{N_1}^{p_1}\cdots\sum_{N_{k-1}}^{p_1^{k-1}}\psi^2(N_1,\ldots,N_{k-1})\ll p_1^{2b'n-\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}k(k-1)\sigma'}.$$

Далее, по лемме 1.8,

$$\sum_{N_1}^{p_1}\cdots\sum_{N_{k-1}}^{p_1^{k-1}}\left|\sum_{y}e(A_{k-1}N_{k-1}+\ldots+A_1N_1)\right|^2\ll$$

$$\ll p_1^{1+\cdots+k-2}\sum_{y_1}\sum_{y_2}\left|\sum_{N_{k-1}}e(k\alpha_kN_{k-1}(y_1-y_2))\right|\ll$$

$$\ll p_1^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}\sum_{y_1}^{P}\sum_{y_2}^{P}\min\left(p_1^{k-1},\ \frac{1}{\{k\alpha_k(y_1-y_2)\}}\right).$$

Так как число решений уравнения $k(y_1-y_2)=Y$ будет $\ll P$, то по лемме 3.5, ввиду $P\ll q$

$$\sum_{y_1}^{P}\sum_{y_2}^{P}\min\left(p_1^{k-1},\ \frac{1}{\{k\alpha_k(y_1-y_2)\}}\right)\ll P\sum_{Y}^{q}\min\left(p_1^{k-1},\ \frac{1}{\{\alpha_kY\}}\right)\ll$$

$$\ll P\left(p_1^{k-1}+q\log q\right).$$

Поэтому имеем, наконец, по (1)

$$\sum_{y}|S|^{b'n}\ll p_1^{b'n-\frac{1}{4}k(k-1)+\frac{1}{4}k(k-1)\sigma'}\,p_1^{\frac{1}{4}(k-1)(k-2)}\,P^{\frac{1}{2}}\sqrt{p_1^{k-1}+q\log q}\ll$$

$$\ll p_1^{b'n+\frac{1}{4}k(k-1)\sigma'}\,P^{\frac{1}{2}}\left(1+p_1^{1-k}q\log q\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, получаем

$$S\ll\frac{1}{p_1}\left(P^{b'n}-p_1^{b'n+\frac{1}{4}k(k-1)\sigma'}\,P^{\frac{1}{2}}\left(1+p_1^{1-k}q\log q\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{b'n}}+p_1\ll$$

$$\ll P\left(P^{-1}p_1^{\frac{1}{2}k(k-1)\sigma'}\left(1+p_1^{1-k}q\log q\right)\right)^{\frac{1}{2b'n}}+p_1.$$

Теорема 9. Пусть $\alpha_k,\ldots,\alpha_0$ — вещественные числа, $k\geqslant 14$,

$$f(x)=\alpha_kx^k+\ldots+\alpha_0,$$

$$\left|\alpha_k-\frac{h}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2},\quad (h,q)=1,\quad q>0.$$

Тогда для

$$P^{1-\varepsilon} \leqslant q \leqslant P^{k-1+\varepsilon}$$

имеем

$$\sum_{x=1}^{P} e(f(x)) \leqslant c(k, \varepsilon) P^{1-\rho+\varepsilon},$$

где

$$\rho > \frac{2}{k^3 (\log k^2 + 2 \cdot 2 \log \log k^2)}.$$

Доказательство. Берем

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{2} k(k-1) \log k^2\right)}{-\log\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)} + 1.$$

Тогда

$$n > k - 1$$

и

$$\frac{1}{2} k(k-1) \sigma' = \frac{1}{2} k(k-1) \left(1 - \frac{1}{k-1}\right)^n \leqslant \frac{1}{2 \log k}.$$

Далее, в лемме 5.5 берем $p_1 = P^{1-\rho}$. Достаточно будет показать, что

$$P\left(P^{-1+\frac{1}{2}\sigma' k(k-1)(1-\rho)+(k-1)\rho}\right)^{\frac{1}{2b'n}} < P^{1-\rho},$$

т. е.

$$1 - \frac{1}{2} \sigma' k(k-1)(1-\rho) + (k-1)\rho > 2b'n\rho$$

и

$$\frac{2b'n - \frac{1}{2} k(k-1) \sigma' + k - 1}{1 - \frac{1}{2} k(k-1) \sigma'} < \frac{1}{\rho}.$$

Но мы имеем

$$b' \leqslant \frac{1}{4} k(k+1) + 2,$$

$$n \leqslant \frac{\log\left(\frac{1}{2} k(k-1) \log k^2\right)}{-\log\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)} + 1 <$$

$$< \frac{\log(k^2 \log k^2)}{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{2(k-1)^2} + \ldots} + 1 <$$

$$< (k-1) \log(k^2 \log k^2) \left(1 - \frac{1}{2(k-1)}\right) + 1 <$$

$$< (k-1) \log(k^2 \log k^2).$$

Так как

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2 \log k}} \leqslant 1 + \frac{0.62}{\log k}$$

для $k \geqslant 14$, то

$$\frac{2b'n - \frac{1}{2}k(k-1)\sigma' + k - 1}{1 - \frac{1}{2}k(k-1)\sigma'} \leqslant \frac{2b'n + k}{1 - \frac{1}{2\log k}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\frac{1}{2}k(k+1)+4\right)(k-1)\log(k^2\log k^2)+k\right)\left(1+\frac{0.62}{\log k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}k^3\log(k^2\log k^2)+4k\log(k^2\log k^2)\right)\left(1+\frac{0.62}{\log k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}k^3\log(k^2\log k^2) +$$

$$+ k^3\log\log k^2\left(\frac{0.62}{\log\log k^2}+\frac{0.62}{2\log k}+\frac{4\log(k^2\log k^2)}{k^2\log\log k^2}\left(1+\frac{0.62}{\log k}\right)\right) <$$

$$< \frac{1}{2}k^3\log(k^2\log k^2)+(0.373+0.118+0.106)\,k^3\log\log k^2 <$$

$$< \frac{1}{2}k^3(\log k^2 + 2\cdot 2\log\log k^2).$$

Для $P^{1-\varepsilon} \leqslant q \leqslant P$ делим

$$\sum_{x=1}^{P} e(f(x))$$

на $[P/q]+1$ части, каждая из которых $\leqslant q^{1-\rho}$, тогда

$$\sum_{x=1}^{P} e(f(x)) \leqslant \frac{P}{q}q^{1-\rho} = Pq^{-\rho} \leqslant P^{1-\rho+\varepsilon}.$$

6. Третье следствие теоремы

Лемма 5.6. Пусть

$$\alpha = \frac{h}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad |\theta| \leqslant 1, \quad (h, q) = 1, \quad q > 0$$

и

$$\Omega = \sum_{x=1}^{q} \min\left(U, \frac{1}{\{g+\alpha x\}^2}\right);$$

тогда

$$\Omega \leqslant U\left(1 + qU^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Доказательство. Полагаем

$$g = \frac{\alpha}{q} + \frac{\theta_1}{q}, \quad |\theta_1| \leqslant 1;$$

тогда

$$\{g+\alpha z\}=\left\{\frac{hz+d+\theta'}{q}\right\}=\left\{\frac{r+2\theta'}{q}\right\}, \quad |\theta'|\leqslant 1,$$

где r — наименьшее абсолютное значение целых чисел $\equiv hz+d \pmod q$. Таким образом, $r\leqslant\frac{1}{2}q$. Каждому r соответствует самое большее два значения z.

Для $2<r\leqslant\frac{q}{2}-2$ получаем

$$\left\{\frac{r+2\theta'}{q}\right\}=\frac{r+2\theta'}{q}\geqslant\frac{r-2}{q}.$$

Берем

$$r_0=\left[qU^{-\frac{1}{2}}\right]+6;$$

тогда

$$\Omega\ll Ur_0+\sum_{r\geqslant r_0}\frac{q^2}{r^2}\ll$$
$$\ll Ur_0+q^2/r_0\ll$$
$$\ll U\left(1+qU^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Лемма 5.7. Пусть

$$S=\sum_{x=1}^{P}e(\alpha_k x^k+\ldots+\alpha_1 x),$$

s — фиксированное целое и

$$\left|\alpha_s-\frac{h_s}{q_s}\right|\leqslant\frac{1}{q_s^2}, \quad (h_s, q_s)=1, \quad 1<s<k.$$

Тогда при любом $\eta<P$

$$S\ll P^{1+\frac{1}{2bn}k(k-1)\sigma'}\eta^{-\frac{1}{8\beta\varkappa b_n}k(k-1)\sigma''}\left(\frac{1}{q_s}+\frac{1}{\eta}+\frac{q_s}{\eta P^{s-1}}\right)^{\frac{1}{4\beta\varkappa bn}}+\eta,$$

где

$$n>k-1, \quad b=2b_1=2\left[\frac{1}{4}k(k+1)\right], \quad \sigma'=\left(1-\frac{1}{k-1}\right)^n,$$

$$\varkappa>k-s+1, \quad \beta=\left[\frac{1}{4}(k-s+2)(k-s+3)\right], \quad \sigma''=\left(1-\frac{1}{k-1}\right)^{\varkappa}.$$

Доказательство. 1) Как и в доказательстве леммы 5.5, имеем

$$S=\frac{1}{\eta}\sum_{y=1}^{\eta}\sum_{x=1}^{P}e(f(y+x))+O(\eta).$$

По неравенству Hölder'a,

$$S\ll\frac{1}{\eta}\left(\eta^{bn-1}\sum_{y}|T|^{bn}\right)^{\frac{1}{bn}}+O(\eta), \quad T=\sum_{x=1}^{P}e(f(y+x)). \tag{1}$$

Пишем

$$f(y+x)=f(y)+\frac{f'(y)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(k)}(y)}{k!}x^k=$$

$$=Y_k+Y_{k-1}x+\ldots+Y_0x^k,$$

где

$$Y_k=\alpha_k y^k+\alpha_{k-1}y^{k-1}+\ldots+\alpha_1 y+\alpha_0,$$

$$Y_{k-1}=\binom{k}{1}\alpha_k y^{k-1}+\binom{k-1}{1}\alpha_{k-1}y^{k-2}+\ldots+\binom{1}{1}\alpha_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_{k-s+1}=\binom{k}{s-1}\alpha_k y^{k-s+1}+\ldots+\binom{s}{s-1}\alpha_s y+\binom{s-1}{s-1}\alpha_{s-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_1=\binom{k}{k-1}\alpha_k y+\binom{k-1}{k-1}\alpha_{k-1},$$

$$Y_0=\alpha_k.$$

Можем написать

$$|T|^{bn}=\sum e(Y_{k-1}\xi_1+\ldots+Y_{k-s+1}\xi_{s-1}+\ldots+Y_1\xi_{k-1}+Y_0\xi_k),$$

где

$$\begin{gathered}\xi_k=x_1^k+\ldots+x_{b_1n}^k-x_{b_1n+1}^k-\ldots-x_{bn}^k,\\ \xi_h=x_1^h+\ldots+x_{b_1n}^h-x_{b_1n+1}^h-\ldots-x_{bn}^h,\\ 1\leqslant h\leqslant k-1\end{gathered}\tag{2}$$

и суммирование распространяется на всевозможные такие значения.

Для данной системы $\xi_h(\leqslant P^h;\ 1\leqslant h\leqslant k-1)$ число решений (2), по теореме 7, будет

$$\ll P^{bn-\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}k(k-1)\sigma'}.$$

Так как Y_0 не зависит от y, то

$$\sum_y |T|^{bn}\ll P^{bn-\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}k(k-1)\sigma'}\sum_{\xi_1}^{P}\cdots\sum_{\xi_{k-1}}^{P^{k-1}}\left|\sum_y e(\xi_1 Y_{k-1}+\ldots+\xi_{k-1}Y_1)\right|\ll$$

$$\ll P^{bn+\frac{1}{2}k(k-1)\sigma'}\sqrt{P^{-s+1}\sum_y\sum_{y'}\left|\sum_{\xi_{s-1}}{}' e(\xi_{s-1}(Y_{k-s+1}-Y'_{k-s+1}))\right|}\ll$$

$$\ll P^{bn+\frac{1}{2}k(k-1)\sigma'}\sqrt{P^{-s+1}\sqrt{\eta^2\sum_y\sum_{y'}\left|\sum_{\xi_{s-1}}e(\xi_{s-1}(Y_{k-s+1}-Y'_{k-s+1}))\right|^2}}\ll$$

$$\ll P^{bn+\frac{1}{2}k(k-1)\sigma'}\sqrt{\eta P^{-s+1}\sqrt{W}},\tag{3}$$

где

$$W=\sum_U\sum_y\sum_{y'} e(U(Y_{k-s+1}-Y'_{k-s+1})),\quad U=\xi_{s-1}-\xi'_{s-1}$$

и

$$Y'=Y(y').$$

2) Имеем

$$W^{\beta\varkappa}\ll (P^{2s-2})^{\beta\varkappa-1}\sum_U V, \tag{4}$$

где

$$V=\Big(\sum_y\sum_{y'} e(U(Y_{k-s+1}-Y'_{k-s+1}))\Big)^{\beta\varkappa}.$$

Поэтому

$$V=\Sigma_1\, e(U(\alpha_k z_{k-s+1}+\ldots+\alpha_s z_1)),$$

где

$$z_j=\binom{s-1+j}{s-1}\left(y_1^j+\ldots+y_{\beta\varkappa}^j-y_1'^j-\ldots-y'^j_{\beta\varkappa}\right), \tag{5}$$

$$1\leqslant y_\nu,\quad y'_\nu\leqslant\eta,\quad 1\leqslant j\leqslant k-s+1.$$

По теореме 7, число решений системы (5) будет

$$\ll \eta^{2\beta\varkappa-\frac{1}{2}(k-s+1)(k-s+2)+\frac{1}{2}(k-s+1)(k-s+2)\sigma''}\ll$$
$$\ll \rho=\eta^{2\beta\varkappa-\frac{1}{2}(k-s+1)(k-s+2)+\frac{1}{2}k(k-1)\sigma''},$$

так как

$$\left(1-\frac{1}{k-s+1}\right)^{\varkappa}<\left(1-\frac{1}{k-1}\right)^{\varkappa}.$$

Поэтому, по лемме 1.8,

$$\sum_U V\ll\rho\sum_{z_1}^{\eta}\cdots\sum_{z_{k-s+1}}^{\eta^{k-s+1}}\left|\sum_U e(U(\alpha_k z_{k-s+1}+\ldots+\alpha_s z_1))\right|\ll$$
$$\ll\rho\sum_{z_1}^{\eta}\cdots\sum_{z_{k-s+1}}^{\eta^{k-s+1}}\min\left(P^{2s-2},\ \frac{1}{4\{\alpha_k z_{k-s+1}+\ldots+\alpha_s z_1\}^2}\right),$$

так как $U=\xi_{s-1}-\xi'_{s-1}$ и $\xi_{s-1}\ll P^{s-1}$.

Следовательно, по лемме 5.6,

$$\sum_U V\ll\rho\eta^{\frac{1}{2}(k-s+1)(k-s+2)-1}\max_g\sum_{z_1}^{\eta}\min\left(P^{2s-2},\ \frac{1}{4\{g+\alpha_s z_1\}^2}\right)\ll$$
$$\ll\rho\eta^{\frac{1}{2}(k-s+1)(k-s+2)}\left(\frac{\eta}{q_s}+1\right)P^{2s-2}(1+q_sP^{-s+1})=$$
$$=\rho\eta^{\frac{1}{2}(k-s+1)(k-s+2)}P^{2s-2}\left(\frac{1}{q_s}+\frac{1}{\eta}+\frac{q_s}{\eta P^{s-1}}\right). \tag{6}$$

3) Из (4) и (6) получаем

$$W^{\beta\varkappa} \ll (P^{2s-2})^{\beta\varkappa} \rho\eta^{\frac{1}{2}(k-s+1)(k-s+2)} \left(\frac{1}{q_s}+\frac{1}{\eta}+\frac{q_s}{\eta P^{s-1}}\right) \ll$$

$$\ll P^{(2s-2)\beta\varkappa} \eta^{2\beta\varkappa+\frac{1}{2}k(k-1)\sigma''} \left(\frac{1}{q_s}+\frac{1}{\eta}+\frac{q_s}{\eta P^{s-1}}\right).$$

Далее, по (3),

$$\sum_y |T|^{bn} \ll P^{bn+\frac{1}{2}k(k-1)\sigma'} \eta^{1+\frac{1}{8\beta\varkappa}k(k-1)\sigma''} \left(\frac{1}{q_s}+\frac{1}{\eta}+\frac{q_s}{\eta P^{s-1}}\right)^{\frac{1}{4\beta\varkappa}}.$$

Наконец, по (1), получаем

$$S \ll P^{1+\frac{1}{2bn}k(k-1)\sigma'} \eta^{\frac{1}{8\beta\varkappa bn}k(k-1)\sigma''} \left(\frac{1}{q_s}+\frac{1}{\eta}+\frac{q_s}{\eta P^{s-1}}\right)^{\frac{1}{4\beta\varkappa bn}} + \eta.$$

Лемма 5.8. Пусть

$$S=\sum_{x=1}^{P} e(\alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x),$$

$$\alpha_s = \frac{h_s}{q_s}+\frac{\theta}{q_s\tau_s}, \quad (h_s, q_s)=1, \quad |\theta| \leqslant 1,$$

$$P^{\frac{1}{2}a-2a^7} < q_s \leqslant \tau_s = P^{s-\frac{1}{2}a+a^7};$$

тогда для $1 < s \leqslant k$ имеем

$$S \ll P^{1-\lambda}, \quad \lambda > \frac{1}{23 \cdot 2k^7 (\log 2k)^2}.$$

Замечание. Лемма может быть улучшена введением теоремы 5, но получаемый результат не влияет на дальнейшие результаты, касающиеся „первого порядка".

Доказательство. 1) $s=k$. Прежде всего рассмотрим случай

$$P < q \leqslant P^{k-\frac{1}{2}a+a^7}.$$

Полагаем

$$n=\left[\frac{\log\left(\frac{1}{2}k^4(k-1)\right)}{-\log\left(1-\frac{1}{k-1}\right)}+1\right],$$

тогда

$$n \leqslant 5k\log k, \quad \frac{1}{2}k(k-1)\sigma' \leqslant a^3,$$

$$b' \leqslant 2\left(\left[\frac{1}{8}k(k+1)\right]+1\right) < k^2-1.$$

Мы докажем, что

$$S \ll P^{1-\rho}, \quad \rho > \frac{1}{43k^4 \log k}.$$

В лемме 5.5 берем $p_1 = P^{1-\rho}$. Достаточно доказать, что

$$\frac{2b'n - \frac{1}{2}k(k-1)\sigma' + k - 1}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}k(k-1)\sigma' - a^7} < \frac{1}{\rho}.$$

Действительно,

$$\frac{2b'n - \frac{1}{2}k(k-1)\sigma' + k - 1}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}k(k-1)\sigma' - a^7} < \frac{10(k^2-1)k\log k + k}{\frac{1}{2}a - a^3 - a^7} \leqslant$$

$$\leqslant 43k^4 \log k.$$

Далее, рассмотрим случай $P^{\frac{1}{2}a - 2a^7} < q \leqslant P$. Разделим интервал $1 \leqslant x \leqslant P$ на $\ll \frac{P}{q}$ частей. По предыдущему результату, сумма, соответствующая каждой части, будет $\ll q^{1-\rho}$. Таким образом,

$$S \ll Pq^{-\rho} \leqslant P^{1-\left(\frac{1}{2}a - 2a^7\right)\rho}.$$

Так как

$$\left(\frac{1}{2}a - 2a^7\right)\rho \geqslant \frac{\frac{1}{2}a - 2a^7}{43k^4 \log k} \geqslant \frac{\frac{1}{2} - 2a^6}{43k^4 \log k} \geqslant \frac{1}{89k^4 \log k} >$$

$$> \frac{1}{23 \cdot 2k^3 (\log 2k)^2}$$

и

$$\frac{1}{43k^4 \log k} > \frac{1}{23 \cdot 2k^7 (\log 2k)^2},$$

то получаем результат для $s = k$.

2) $1 < s < k$ (следовательно, $k \geqslant 3$). Берем

$$\eta = P^{1-a^7},$$

тогда, по лемме 5.7, имеем

$$S \ll P^{1+\varepsilon}\left(P^{\frac{1}{2}k(k-1)\sigma' - \frac{a(1-4a^6)}{8\beta k} + \frac{k(k-1)\sigma''}{8\beta k}}\right)^{\frac{1}{bn}} + P^{1-a^7} \ll$$

$$\ll P^{1+\varepsilon}\left(P^{\frac{1}{2}k(k-1)\sigma' - \frac{a(1-4a^6)}{8\beta k} + \frac{k(k-1)\sigma''}{8\beta k}}\right)^{\frac{2}{k(k+1)n}} + P^{1-a^7}.$$

Полагаем

$$k = \left[\frac{\log 8k^3}{-\log\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)} + 1\right],$$

тогда

$$n<(k-1)\log\left(\frac{128}{7}k^6\log 8k^3\right),\quad \frac{1}{2}k(k-1)\sigma'<\frac{7}{256\,k^4\log 8k^3},$$

$$-\frac{7}{16\,k^4\log 8k^3}+\frac{k(k-1)}{2}\sigma'<-\frac{105}{256\,k^4\log 8k^3}.$$

Получаем

$$S\ll P\left(P^{-\frac{7}{16k^4\log 8k^3}+\frac{k(k-1)}{2}\sigma'}\right)^{\frac{2}{k(k+1)n}}+P^{1-\sigma'}.$$

Далее, имеем

$$n=\left[\frac{\log\left(\frac{128}{7}k^6\log 8k^3\right)}{-\log\left(1-\frac{1}{k-1}\right)}+1\right].$$

Поэтому

$$n<(k-1)\log\left(\frac{128}{7}k^6\log 8k^3\right),\qquad \frac{k(k-1)}{2}\sigma'<\frac{7}{256\,k^4\log 8k^3},$$

$$-\frac{7}{16k^4\log 8k^3}+\frac{k(k-1)}{2}\sigma'<-\frac{105}{256\,k^4\log 8k^3}.$$

Следовательно,

$$S\ll P^{1-\lambda}+P^{1-\sigma'},$$

где

$$\lambda>\frac{105}{128\,k^6(1+\sigma)\,n\log 8k^3}>\frac{105}{128\,k^7(\log 8k^3)\log\left(\frac{128}{7}k^6\log 8\,k^3\right)}>$$

$$>\frac{35}{128\,k^7(\log 2k)\log\left(\frac{6}{7}(2\,k)^6\log 2\,k\right)}>\frac{35}{128\times 6.32\,k^7(\log 2\,k)^2}>$$

$$>\frac{1}{23.2\,k^7(\log 2\,k)^2}.$$

Получаем лемму для $1<s<k$.

ГЛАВА VI

Тригонометрические суммы, содержащие простые числа

1.

Целью настоящей главы является доказательство теоремы 10, являющейся основным принципом аддитивной теории простых чисел. Теорема в существенном принадлежит И. М. Виноградову*, если не считать некоторых видоизменений, необходимых для совместной проблемы; мы пользуемся сокращением $L = \log P$.

Теорема 10. Пусть $0 < Q \leqslant c_1(k) L^{\sigma_1}$ и

$$S = \sum_{\substack{p \leqslant P \\ p \equiv l \pmod Q}} e(f(p)),$$

где

$$f(x) = \frac{h}{q} x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \ldots + \alpha_k,$$

числа α вещественны, $(h, q) = 1$ и $L^\sigma < q \leqslant P^k L^{-\sigma}$. Тогда при любом данном $\sigma_0 > 0$ имеем

$$|S| \leqslant c_2(k) PL^{-\sigma_0} Q^{-1},$$

при условии, что

$$\sigma \geqslant 2^{6k}(\sigma_0 + \sigma_1 + 1).$$

2. Необходимые леммы

Лемма 6.1. Для $\sigma_2 \leqslant 2^{3t} - 1$ имеем

$$\sum_{0 < z \leqslant M}' (d(z))^t = O(M(\log M)^{-\sigma_2}),$$

где Σ' означает сумму, состоящую из всех слагаемых, удовлетворяющих условию

$$(\log M)^{\sigma_2} \leqslant c_3 (d(z))^t.$$

* Труды Математического института, Тбилиси, III, 1937, 1—34, 35—61.

Доказательство. По лемме 2.5, имеем

$$(\log M)^{2\sigma_3} \sum_{<z\leqslant M}{}' (d(z))^t = O\Bigl(\sum_{0<z\leqslant M} d^{3t}(z)\Bigr) =$$

$$= O\bigl(M(\log M)^{2^{3t}-1}\bigr) = O\bigl(M(\log M)^{\sigma_2}\bigr).$$

Отсюда лемма следует непосредственно.

Лемма 6.2. Пусть l — положительное целое ($\leqslant L^{\sigma_3}$), Q — целое $\leqslant L^{\sigma_4}$,

$$f(x) = \frac{h}{q} x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \ldots + \alpha_k,$$

где $(h, q) = 1$, числа α вещественны и $L^\sigma < q \leqslant P^k L^{-\sigma}$ Тогда для

$$\sigma \geqslant 2^k(\sigma_0 + \sigma_3) + 2k\sigma_4 + 2^{3(k-2)}$$

имеем

$$S = \sum_{\substack{lx\leqslant P \\ lx \equiv t \pmod{Q}}} e(f(lx)) = O(P_1 L^{-\sigma_0}),$$

где $P_1 = P/Ql$.

Доказательство. Пишем S в виде

$$S = \sum_{x\leqslant P_2} e(f(l'(Qx+t'))), \quad P_2 = P(Q,l)/Ql,$$

где $l' = l/(Q, l)$ и t' — решение сравнения $lx \equiv t \pmod{Q}$ (если t' не существует, то лемма тривиальна).

Лемма очевидна для $k = 1$, так как, по лемме 1.8,

$$|S| = \Bigl|\sum_{x\leqslant P_2} e\Bigl(\frac{h}{q} l'(Qx+t')\Bigr)\Bigr| \leqslant q \leqslant PL^{-\sigma} \leqslant PL^{-\sigma_0}.$$

Предполагаем $k > 1$. По леммам 3.3, 3.4 и 1.8 имеем

$$|S|^{2^{k-1}} \ll P_2^{2^{k-1}-1} + P_2^{2^{k-1}-k} \sum_{\xi_1=1}^{P_2} \cdots \sum_{\xi_{k-1}=1}^{P_2} \min\left(P_2, \frac{1}{2\left\{l'^k Q^k k! \frac{h}{q} \xi_1 \ldots \xi_{k-1}\right\}}\right), \quad (1)$$

или

$$|S|^{2^{k-1}} \ll P_2^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k} \Sigma,$$

где Σ означает сумму правой части предыдущего неравенства.

Полагаем

$$z = l'^k Q^k k! \xi_1 \ldots \xi_{k-1}, \quad (2)$$

тогда $z \leqslant l'^k Q^k k! P_2^{k-1} = M$.

Для фиксированного z число решений (2) будет $\ll d^{k-2}(z)$. По лемме 6.1, для $\sigma_2 \geqslant 2^{3(k-2)}-1$ имеем

$$\sum \ll P_2 \sum_{z=1}^{M}{}' d^{k-2}(z) + L^{\sigma_2} \sum_{z=1}^{M} \min\left(P_2, \frac{1}{2\{hz/q\}}\right) \ll$$

$$\ll ML^{-\sigma_2} P_2 + L^{\sigma_2} \sum_{z=1}^{M} \min\left(P_2, \frac{1}{2\{hz/q\}}\right),$$

так как $\log M \gg \log P$. По лемме 3.5,

$$\sum \ll ML^{-\sigma_2} P_2 + L^{\sigma_2} \left(\frac{M}{q}+1\right)\left(P_2 + q\log q\right) \ll$$

$$\ll P_1^{\,k}\left(L^{k(\sigma_3+\sigma_4)-\sigma_2} + L^{\sigma_2+k(\sigma_3+\sigma_4)-\sigma+1}\right),$$

так как

$$MP_2 \ll l'^k Q^k P_2^{\,k} = P^k \ll P_1^{\,k} L^{k(\sigma_3+\sigma_4)}.$$

Выбирая

$$\sigma_2 = 2^{k-1}(\sigma_0+\sigma_3) + k\sigma_4 + 2^{3(k-2)} - 1,$$

имеем

$$\sum \ll P_1^{\,k} L^{-2^{k-1}\sigma_0-(2^{k-1}-k)\sigma_3},$$

так как

$$\sigma \geqslant 2^k(\sigma_0+\sigma_3) + 2k\sigma_4 + 2^{3(k-2)}.$$

Тогда, согласно (1),

$$|S|^{2^{k-1}} \ll P_2^{\,2^{k-1}-k} P_1^{\,k} L^{-2^{k-1}\sigma_0-(2^{k-1}-k)\sigma_3} \ll$$

$$\ll P_1^{\,2^{k-1}} L^{-2^{k-1}\sigma_0},$$

т. е.

$$S \ll P_1 L^{-\sigma_0}.$$

Лемма 6.3. Пусть l — целое число ($\leqslant L^{\sigma_3}$) и пусть

$$\Omega = \sum_{d}\sum_{m} e(f(ldm)), \quad f(x) = \frac{h}{q}x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \cdots + \alpha_k,$$

где $(h,q)=1$, α' — действительные числа, $L^\sigma < q \leqslant P^k L^{-\sigma}$; при суммировании d пробегает некоторое множество (d) чисел, удовлетворяющих условию

$$D < d \leqslant D', \quad 1 < D < \frac{P}{l} = P_1, \quad D' \leqslant 2D,$$

и, при фиксированном d, m пробегает некоторое множество (m), удовлетворяющее условию $P'/d < m \leqslant P_1/d$, где P' — некоторое число >0. Тогда для $L^{\sigma_5} < D < PL^{-\sigma_5}$

$$\Omega \ll P_1 L^{-\sigma_0},$$

при условии, что

$$\sigma_s \geqslant 2^{2k}\sigma_0, \quad \sigma_6 \geqslant (2k+1)\sigma_3 + 2^{2k+1}\sigma_0 + 2^{3(2k-1)}$$

и

$$\sigma \geqslant 2k\sigma_3 + 2^{2k+1}\sigma_0 + 2^{3(2k-1)}.$$

Доказательство. 1) Для простоты обозначим $P_0 = [P_1/D]$. Согласно неравенству Cauchy, имеем

$$\begin{aligned} |\Omega|^2 &\leqslant D\sum_d \Big|\sum_m e(f(ldm))\Big|^2 = \\ &= D\sum_x \sum_m \sum_{m_1} e\left(\frac{h}{q} l^k x^k (m^k - m_1^k) + \ldots\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где x пробегает все целые числа в промежутке $D < x \leqslant D'$, а m и m_1 при фиксированном x пробегают некоторое множество (m), удовлетворяющее условию

$$\frac{P'}{x} < m \leqslant \frac{P_1}{x}.$$

Изменив порядок суммирования (1), получим

$$|\Omega|^2 \leqslant D\sum_{m_1}\sum_m \sum_x e\left(\frac{h}{q} l^k x^k (m^k - m_1^k) + \ldots\right), \tag{2}$$

где m и m_1 пробегают некоторое множество (m) такое, что

$$0 < m \leqslant P_0, \quad 0 < m_1 \leqslant P_0,$$

а x, при заданной паре значений m и m_1, пробегает все целые числа в промежутке

$$\max\left(D, \frac{P'}{m}, \frac{P'}{m_1}\right) < x \leqslant \min\left(D', \frac{P_1}{m}, \frac{P_1}{m_1}\right).$$

2) Имеем

$$\left|\sum_m \sum_x e\left(\frac{h}{q} l^k x^k (m^k - m_1^k) + \ldots\right)\right| \leqslant \sum_y^{P_0} S_y, \tag{3}$$

где

$$S_y = \left|\sum_x e\left(\frac{h}{q} l^k x^k (y^k - m_1^k) + \ldots\right)\right|$$

и x пробегает целые числа в промежутке

$$\max\left(D'', \frac{P'}{y}\right) < x \leqslant \min\left(D''', \frac{P_1}{y}\right),$$

$$D'' = \max\left(D, \frac{P'}{m_1}\right), \quad D''' = \min\left(D', \frac{P_1}{m_1}\right).$$

Согласно леммам 3.3 и 3.4,

$$|S_y|^{2^k} = \left| \sum_x e\left(\frac{h}{q} l^k x^k (y^k - m_1^k) + \ldots\right) \right|^{2^k} \ll$$

$$\ll D^{2^k-k-1} \sum_{\xi_1}^{D} \cdots \sum_{\xi_k}^{D} \sum_x^{D} e\left(\frac{h}{q} l^k (y^k - m_1^k) k! \xi_1 \ldots \xi_k\right).$$

Суммируя по y и меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_y |S_y|^{2^k} \ll D^{2^k-k} \sum_{\xi_1}^{D} \cdots \sum_{\xi_k}^{D} \left| \sum_y^{P_0} e\left(\frac{h}{q} l^k (y^k - m_1^k) k! \xi_1 \ldots \xi_k\right) \right|. \qquad (4)$$

3) Для $k=1$ имеем

$$\sum_y |S_y|^2 \ll D \sum_{\xi_1}^{D} \left| \sum_y^{P_0} e\left(\frac{h}{q} l y \xi_1\right) \right| \ll$$

$$\ll D \sum_{\xi_1}^{D} \min\left(P_0 \frac{1}{\left\{\frac{h}{q} l \xi_1\right\}}\right) \ll D \sum_{\xi}^{Dl} \min\left(P_0 \frac{1}{\{h\xi/q\}}\right) \ll$$

$$\ll D\left(\frac{Dl}{q} + 1\right) (P_0 + q \log q).$$

В силу (2) и неравенства Cauchy,

$$|\Omega|^2 \ll DP_0 \max_{m_1} \sum_y^{P_0} |S_y| \ll DP_0 \max_{m_1} \sqrt{P_0 \sum_y^{P_0} |S_y|^2} \ll$$

$$\ll D^2 P_0^2 \left(\left(\frac{l}{q} + \frac{1}{D}\right) \left(1 + \frac{q \log q}{P_0}\right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь получаем

$$\Omega \ll DP_0 \left(\frac{h}{q} + \frac{1}{D} + \frac{l \log q}{P_0} + \frac{q \log q}{DP_0}\right)^{\frac{1}{7}} \ll$$

$$\ll P_1 (L^{\sigma_3 - \sigma} + L^{-\sigma_5} + L^{2\sigma_3 - \sigma_6 + 1} + L^{\sigma_3 - \sigma + 1})^{\frac{1}{4}} \ll$$

$$\ll P_1 L^{-\sigma_0},$$

так как

$$\sigma \geqslant \sigma_3 + 1 + 4\sigma_0, \quad \sigma_5 \geqslant 4\sigma_0, \quad \sigma_6 \geqslant 2\sigma_3 + 1 + 4\sigma_0.$$

4) Применяя неравенство Hölder'a, имеем

$$\left(\sum_{\xi_1}^{D}\cdots\sum_{\xi_k}^{D}\left|\sum_{y}^{P_0} e\left(\frac{h}{q} l^k y^k k!\,\xi_1\cdots\xi_k\right)\right|\right)^{2^{k-1}} \ll$$

$$\ll D^{k(2^{k-1}-1)}\sum_{\xi_1}^{D}\cdots\sum_{\xi_k}^{D}\left|\sum_{y}^{P_0} e\left(\frac{h}{q} l^k y^k k!\,\xi_1\cdots\xi_k\right)\right|^{2^{k-1}}. \qquad (5)$$

Согласно леммам 3.3, 3.4 и 1.8, имеем

$$\left|\sum_{y} e\left(\frac{h}{q} l^k k!\,\xi_1\cdots\xi_k y^k\right)\right|^{2^{k-1}} \ll$$

$$\ll P_0^{2^{k-1}-k}\sum_{\eta_1}^{P_0}\cdots\sum_{\eta_{k-1}}^{P_0}\min\left(P_0, \frac{1}{2\left\{\frac{h}{q} l^k k!^2\,\xi_1\cdots\xi_k\,\eta_1\cdots\eta_{k-1}\right\}}\right), \qquad (6)$$

поэтому, в силу (5) и (6),

$$\left(\sum_{\xi_1}\cdots\sum_{\xi_k}\left|\sum_{y} e\left(\frac{h}{q} l^k y^k k!\,\xi_1\cdots\xi_k\right)\right|\right)^{2^{k-1}} \ll D^{k(2^{k-1}-1)} P_0^{2^{k-1}-k}\sum_{\xi_1}^{D}\cdots$$

$$\cdots\sum_{\xi_k}^{D}\sum_{\eta_1}^{P_0}\cdots\sum_{\eta_{k-1}}^{P_0}\min\left(P_0, \frac{1}{2\left\{\frac{h}{q} l^k k!^2\,\xi_1\cdots\xi_k\,\eta_1\cdots\eta_{k-1}\right\}}\right). \qquad (7)$$

5) Часть суммы, соответствующая членам

$$\xi_1\cdots\xi_k\,\eta_1\cdots\eta_{k-1}=0,$$

очевидно,

$$\ll D^{k\cdot 2^{k-1}} P_0^{2^{k-1}}\left(\frac{1}{D}+\frac{1}{P_0}\right)\ll$$

$$\ll D^{k\cdot 2^{k-1}} P_0^{2^{k-1}}\left(L^{-\sigma_5}+L^{\sigma_3-\sigma_6}\right). \qquad (8)$$

Число решений уравнения

$$z=l^k k!^2\,\xi_1\cdots\xi_k\,\eta_1\cdots\eta_{k-1},$$

очевидно, $\leqslant (d(z))^{2k-1}$ и $|z|\leqslant l^k D^k P_0^{k-1}$.

Обозначим $M=l^k D^k P_0^{k-1}$. Согласно (7), (8) и лемме 6.1,

$$\left(\sum_{\xi_1}\cdots\sum_{\xi_k}\left|\sum_{y} e\left(\frac{h}{q} l^k y^k k!\,\xi_1\cdots\xi_k\right)\right|\right)^{2k-1} \ll$$

$$\ll D^{k.2^{k-1}} P_0^{2^{k-1}}\left(L^{-\sigma_5}+L^{\sigma_3-\sigma_6}\right)+$$

$$+D^{k.2^{k-1}-k} P_0^{2^{k-1}-k}\left(ML^{-\sigma_2}P_0+L^{\sigma_1}\sum_{0<z\leqslant M}\min\left(P_0, \frac{1}{2\{hz/q\}}\right)\right), \qquad (9)$$

если $\sigma_2 > z^{3(2k-1)}-1$.

По лемме 3.5, имеем

$$\sum_{0<z\leqslant M}\min\left(P_0,\frac{1}{2\{hz/q\}}\right)\ll\left(\frac{M}{q}+1\right)(P_0+q\log q)\ll$$

$$\ll D^k P_0^k\left(L^{1+k\sigma_3-\sigma}+L^{(k+1)\sigma_3-\sigma_6+1}\right),$$

так как $M\ll L^{k\sigma_3}D^kP_0^{k-1}$.

Следовательно, в силу (9),

$$\left(\sum_{\xi_1}\cdots\sum_{\xi_k}\left|\sum_y e\left(\frac{h}{q}l^k k!\xi_1\cdots\xi_k(y^k-m_1^k)\right)\right|\right)^{2^{k-1}}\ll$$

$$\ll D^{k.2^{k-1}}P_0^{2^{k-1}}\left(L^{-\sigma_5}+L^{k\sigma_3-\sigma_4}+L^{\sigma_2+1+k\sigma_3-\sigma}+L^{\sigma_2+(k+1)\sigma_3-\sigma_6+1}\right).$$

6) Возьмем

$$\sigma_2=k\sigma_3+2^{2k}\sigma_0+2^{3(2k-1)}-1;$$

так как

$$\sigma_5\geqslant 2^{2k}\sigma_0,\quad \sigma_6\geqslant(2k+1)\sigma_3+2^{2k+1}\sigma_0+2^{3(2k-1)}$$

и

$$\sigma>2k\sigma_3+2^{2k+1}\sigma_0+2^{3(2k-1)},$$

то имеем

$$\sum_{\xi_1}\cdots\sum_{\xi_k}\left|\sum_y e\left(\frac{h}{q}l^k k!\xi_1\cdots\xi_k(y^k-m_1^k)\right)\right|\ll D^kP_0L^{-2^{k+1}\sigma_0}.$$

Согласно (4),

$$\sum_y|S_y|^{2^k}\ll D^{2^k}P_0L^{-2^{k+1}\sigma_0},$$

а применив неравенство Hölder'a, имеем

$$\sum_y|S_y|\ll P_0^{1-2^{-k}}\left(\sum|S_y|^{2^k}\right)^{2^{-k}}\ll DP_0L^{-2\sigma_0}.$$

Согласно (2), получаем

$$|\Omega|^2\ll DP_0DP_0L^{-2\sigma_0}$$

и

$$\Omega\ll DP_0L^{-\sigma_0}\ll P_1L^{-\sigma_0}.$$

3. Доказательство теоремы

1) Пусть H обозначает произведение всех простых чисел $\leqslant\sqrt{P}$. Пусть (d) означает последовательность, состоящую из делителей числа H. Хорошо известным рассуждением получаем

$$S=\sum_{d\leqslant p}\mu(d)S_d+O(\sqrt{P}),$$

где $\mu(d)$ — функция Мебиуса и

$$S_d = \sum_{\substack{dm \leqslant P \\ dm \equiv l,(Q)}} e(f(dm)).$$

2) Теперь мы оценим сумму

$$S_0 = \sum_{d \leqslant L^{\lambda_1}} \mu(d) S_d, \quad \lambda_1 = 2^{2k}(\sigma_0 + \sigma_1 + 1).$$

Согласно лемме 6.2, взяв $l = d$, $\sigma_3 = \lambda_1$, $\sigma_4 = \sigma_1$ и $\sigma_0 + 1$ вместо σ_0, имеем

$$|S_d| \ll \frac{P}{Qd} L^{-\sigma_0 - 1},$$

так как

$$\sigma \geqslant 2k\sigma_1 + 2^k(\sigma_0 + 1 + \lambda_1) + 2^{3(k-2)}.$$

Тогда

$$S_0 \ll \sum_{d \leqslant L^{\lambda_1}} \frac{P}{Qd} L^{-\sigma_0 - 1} \ll PQ^{-1} L^{-\sigma_0}.$$

3) Пусть (d_0) обозначает подмножество множества (d), состоящее из чисел с четным числом простых множителей, а (d_1) обозначает остальную часть (d).

Пишем тогда

$$S' = \sum_{L^{\lambda_1} < (d) \leqslant P} \mu(d) S_d = T_0 - T_1,$$

где

$$T_0 = \sum_{L^{\lambda_1} < (d_0) \leqslant P} S_d, \quad T_1 = \sum_{L^{\lambda_1} < (d_1) < P} S_d.$$

Изучим только T_0, а к T_1 можно применить тот же самый метод.

4) Рассмотрим частичную сумму суммы T_0.

$$T_0' = \sum_{L^{\lambda_1} \leqslant (d_0) \leqslant PL^{-\lambda_2}} S_d, \quad \lambda_2 = 2^{2k+1}(\sigma_0 + \sigma_1 + 1) + 2^{3(2k-1)}.$$

Разобьем интервал на $O(L)$ частей, каждая вида

$$D < d < D', \quad D' \leqslant 2D.$$

Типичную частичную сумму, соответствующую такому подинтервалу, обозначим через Ω. Тогда

$$\Omega = \sum_d \sum_m e(f(dm)),$$

где d пробегает ряд значений, удовлетворяющих условиям

$$D < d \leqslant D', \quad D' \leqslant 2D, \quad L^{\lambda_1} \leqslant d \leqslant PL^{-\lambda_2},$$

и при фиксированном d m пробегает ряд значений, удовлетворяющих условиям:

$$0 < m \leqslant \frac{P}{d}, \quad md \equiv t \pmod Q.$$

По лемме 6.3, взяв $l=1$, $\sigma_3=0$, $\sigma_5=\lambda_1$, $\sigma_6=\lambda_2$ и $\sigma_0+\sigma_1+1$ вместо σ_0, имеем

$$\Omega \ll PL^{-\sigma_0-1-\sigma_1},$$

так как $\sigma \geqslant 2^{2k+1}(\sigma_0+\sigma_1+1)+2^{3(2k-1)}$.
Отсюда следует, что

$$T_0' \ll L\,|\Omega| \ll \frac{P}{Q} L^{-\sigma_0}.$$

5) Часть суммы, которую остается рассмотреть, есть

$$T_0'' = \sum_d \sum_m e(f(dm)),$$

где d пробегает некоторое множество (d_0), подчиненное условию

$$PL^{-\lambda_2} < d \leqslant P,$$

а m, при фиксированном d, пробегает целые числа, удовлетворяющие условиям:

$$0 < m \leqslant P/d, \quad md \equiv \lambda \pmod Q.$$

Меняя порядок суммирования, имеем

$$T_0'' = \sum_m T(m), \quad T(m) = \sum_d e(f(dm)),$$

где m пробегает целые числа,

$$m = 1, 2, \ldots, [L^{\lambda_2}],$$

а d, при фиксированном m, пробегает промежуток

$$PL^{-\lambda_2} < d \leqslant \frac{P}{m}.$$

6) Пусть (d_0') означает подмножество множества (d_0), состоящее из целых чисел, которые содержат простые множители $\geqslant L^{\lambda_3}$, где $\lambda_3 = \sigma_0 + \lambda_2 + \sigma_1$, а (d_0'') обозначает остальную часть (d_0). Тогда

$$T(m) = T'(m) + T''(m), \quad T'(m) = \sum_{(d_0')}, \quad T''(m) = \sum_{(d_0'')}.$$

Число элементов из (d_0''), удовлетворяющих неравенствам $PL^{-\lambda_1}<d\leqslant\frac{P}{m}$, очевидно, меньше числа F целых чисел l, не содержащих квадратов и удовлетворяющих неравенствам

$$P^{\frac{1}{2}}<l<P,$$

а простые множители l не превосходят L^{λ_3}. Предположим, что l содержит s множителей; тогда

$$L^{s\lambda_3}\geqslant\lambda>P^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда $s\geqslant\frac{1}{2}L/(\lambda_3\log L)$. Далее,

$$d(l)=2^s>2^{\frac{1}{2}L/(\lambda_3\log L}\geqslant L^{\lambda_3+1}.$$

В силу леммы 2.5,

$$FL^{\lambda_3+1}\leqslant\sum_{l=1}^{P}d(l)\ll PL,$$

$$F\ll PL^{-\lambda_3}.$$

Имеем

$$T(m)=T'(m)+O(PL^{-\lambda_3})=$$

$$=T'(m)+O\left(\frac{P}{Q}L^{-\sigma_0-\lambda_2}\right),$$

так как $\lambda_3=\sigma_0+\lambda_2+1$.

7) Пусть $T_s(m)$ обозначает сумму, распространенную на такое подмножество (d_0'), каждый элемент которого содержит в точности s простых множителей $\geqslant L^{\lambda_3}$. Так как

$$L^{\lambda_3 s}\leqslant P,\quad s\leqslant\frac{L}{\lambda_3\log L}<L,$$

то

$$T'(m)=\sum_{s<L}T_s(m),$$

где

$$T_s(m)=\sum e(f(md)).$$

Здесь суммирование распространено на все d, удовлетворяющие условию

$$PL^{-\lambda_2}<d\leqslant P_1=\frac{P}{m},$$

и, кроме того, условию, что d принадлежат (d_0'), т. е. имеют в точности s простых множителей $\geqslant L^{\lambda_3}$.

8) Чтобы оценить $T_s(m)$, введем общую сумму

$$T_{s0}(m)=\sum_u \sum_v e(f(muv)),$$

где u пробегает все простые числа $\geqslant L^{\lambda_3}$, принадлежащие (d), а v при заданном u пробегает все целые числа, удовлетворяющие условиям

$$\frac{PL^{-\lambda_2}}{u}<v\leqslant\frac{P_1}{u}, \quad muv\equiv t \pmod Q$$

и принадлежащие (d_1), в точности с $s-1$ простыми множителями $\geqslant L^{\lambda_3}$.

Каждый член $e(f(md))$ в $T_s(m)$ s раз встречается в $T_{s0}(m)$. Члены $T_{s0}(m)$, кроме тех, которые внесены суммами $T_s(m)$, имеют вид

$$e(f(mp^2v_1)), \quad \frac{PL^{-\lambda_2}}{p^2}<v_1\leqslant\frac{P_1}{p^2},$$

где $p\geqslant L^{\lambda_3}$, а v_1 пробегает элементы множества (d_0), имеющие в точности $s-2$ простых множителя $\geqslant L^{\lambda_3}$ (для $s=1$ таких членов не существует). Такой член встречается в $T_{s0}(m)$ один и только один раз, потому что v_1 не содержит квадратов. Для заданного p число членов $\leqslant\frac{p_1}{p_2}$. Таким образом,

$$T_{s0}(m)=sT_s(m)+O\left(\sum_{L^{\lambda_3}\leqslant p}\frac{P_1}{p^2}\right)=$$

$$=sT_s(m)+O\left(\frac{P}{m}L^{-\lambda_3}\right).$$

Поэтому

$$T_s(m)=\frac{1}{s}T_{s0}(m)+O\left(\frac{P}{ms}L^{-\lambda_3}\right).$$

9) Применим к $T_{s0}(m)$ лемму 6.3. Имеем

$$T_{s0}(m)=\sum_u \sum_v e(f(muv)),$$

где u пробегает простые числа в промежутке

$$L^{\lambda_3}\leqslant u\leqslant\sqrt{P},$$

а v при заданном u пробегает элементы множества (d_1), удовлетворяющие условиям:

(*i*) v содержит в точности $s-1$ простых множителей $\geqslant L^{\lambda_3}$,

(*ii*) $\frac{PL^{-\lambda_2}}{u}<v\leqslant\frac{P_1}{u}$,

(*iii*) $muv\equiv t \pmod Q$.

Разобьем интервал $L^{\lambda_3} \leqslant u \leqslant \sqrt{P}$ на $O(L)$ частей и к каждой частичной сумме применим лемму 6.3, взяв $l = m$, $\sigma_3 = \lambda_2$, $\sigma_5 = \lambda_3$, в качестве σ_6 — сколь угодно большое число, и $\sigma_1 + \sigma_0 + 2$ вместо σ_0. Будем иметь тогда

$$T_{s0}(m) \ll \frac{P}{m} L^{-\sigma_0 - \sigma_1 - 2} L = \frac{P}{m} L^{-\sigma_0 - \sigma_1 - 1},$$

так как

$$\lambda_3 \geqslant 2^{2k}(\sigma_1 + \sigma_0 + 2), \quad \sigma \geqslant 2k\lambda_2 + 2^{2k+1}(\sigma_1 + \sigma_0 + 2) + 2^{3(2k-1)}.$$

Таким образом,

$$T_s(m) \ll \frac{P}{sm} L^{-\sigma_0 - \sigma_1 - 1} + \frac{P}{sm} L^{-\lambda_3} \ll \frac{P}{sm} L^{-\sigma_0 - \sigma_1 - 1},$$

так как $\lambda_3 \geqslant \sigma_0 + \sigma_1 + 1$.

Наконец, имеем

$$\begin{aligned} T_0 &= T_0' + T_0'' = T_0' + \sum_m T(m) \ll \\ &\ll T_0' + \sum_m T'(m) + \sum_m \frac{P}{Q} L^{-\sigma_0 - \lambda_2} \ll \\ &\ll \frac{P}{Q} L^{-\sigma_0} + \sum_m \sum_{s<L} T_s(m) \ll \\ &\ll \frac{P}{Q} L^{-\sigma_0} + \sum_m \sum_{s<L} \frac{P}{Qsm} L^{-\sigma_0 - 1} \ll \\ &\ll \frac{P}{Q} L^{-\sigma_0}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S \ll \frac{P}{Q} L^{-\sigma_0}.$$

ГЛАВА VII

Асимптотическая формула для числа решений проблемы Варинга-Гольдбаха

1.

Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми значениями k-ой степени с положительным старшим коэффициентом A. Допустим, что не существует такого целого q, что сравнение $f(x) \equiv f(0) \pmod q$ удовлетворяется тождественно для всех целых x. Пусть $I(N)$ означает число решений уравнения

$$f(p_1) + \ldots + f(p_s) = N,$$

где p — целые числа (для краткости мы будем называть эту проблему проблемой Варинга-Гольдбаха). Цель настоящей главы — установить следующую теорему:

Теорема 11. Для

$$s \geqslant \begin{cases} 2^k + 1 & \text{при } 1 \leqslant k < 14, \\ k^3 (\log k + 2.2 \log\log k) & \text{при } k \geqslant 14, \end{cases}$$

имеем

$$\left| I(N) - A^{-sa}\,\mathfrak{S}(N) \frac{\Gamma^s(a)}{\Gamma(sa)} \frac{N^{sa-1}}{(\log N)^s} \right| \leqslant \frac{c\,(k, s, \text{коэффициенты } f)\, N^{sa-1}}{(\log N)^{s+1}} \log\log N,$$

где

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} B_s(N, q),$$

$$B_s(N, q) = \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{\bar q} \left(\frac{W_{h,q}}{\varphi(\bar q)} \right) e_q(-hN),$$

$$W_{h,q} = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{\bar q} e_q(hf(l)), \quad \bar q = q(d, q),$$

а d — общий наименьший знаменатель коэффициентов $f(x)$.

Для доказательства теоремы 11 нам понадобится одна важная лемма о числе $r_2(p)$ решений уравнения

$$f(x_1)+\cdots+f(x_t)=f(y_1)+\cdots+f(y_t),\quad 0\leqslant x, y\leqslant P.$$

Именно, при $2t>k^3(\log k+2.2\log\log k)-4$ и $k\geqslant 14$

$$r_{2t}=\int_0^1 |T(\alpha)|^{2t}\,d\alpha\ll P^{2t-k},\quad T(\alpha)=\sum_{x=1}^{P} e(f(x)\alpha).$$

2. Предварительные леммы

Лемма 7.1. Пусть $\tau\geqslant 1$. Для всякого действительного числа α существуют целые h и q такие, что

$$\left|\alpha-\frac{h}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q\tau},\quad 0<q<\tau,\quad (h, q)=1.$$

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем предположить, что $\alpha>0$. Разложим α в непрерывную дробь, и пусть

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{[\alpha]}{1},\quad \frac{P_2}{Q_2},\quad \frac{P_3}{Q_3},\ldots$$

будут последовательные подходящие дроби. Последовательность Q_ν или возрастает неограниченно с возрастанием ν или обрывается. Если она обрывается на P_s/Q_s, $Q_s\leqslant\tau$, то $\alpha=P_s/Q_s$, и лемма очевидна. В противном случае существует такое целое m, что

$$Q_m<\tau\leqslant Q_{m+1}.$$

Тогда

$$\left|\alpha-\frac{P_m}{Q_m}\right|\leqslant\left|\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}-\frac{P_m}{Q_m}\right|=\frac{1}{Q_m Q_{m+1}}\leqslant\frac{1}{Q_m\tau},$$

и получается наша лемма с $h=P_m$, $q=Q_m$.

Лемма 7.2 (Эйлерова формула суммирования). Положим

$$b_1(x)=x-[x]+\frac{1}{2}\cdot$$

Определим по индукции:

$$b_l(x+1)=b_l(x), \tag{1}$$

$$\int_0^x b_l(y)\,dy=b_{l+1}(x)-b_{l+1}(0). \tag{2}$$

Пусть $b>a$, а функция $g(x)$ непрерывна на $a\leqslant x\leqslant b$ вместе с теми своими производными, которые встретятся ниже.

Тогда, для всякого t

$$\sum_{\substack{m \\ a\leqslant m+t<b}} g(m+t)=\int_a^b g(x)\,dx+$$

$$+\sum_{r=0}^{l-1}\left(g^{(r)}(b)\,b_{r+1}(t-b)-g^{(r)}(a)\,b_{r+1}(t-a)\right)-\int_a^b g^{l}(x)\,b_l(t-x)\,dx. \quad (3)$$

Доказательство. 1) Редукция леммы:

1.1) Мы вправе предположить, что $t=0$, так как, полагая $a-t=A$, $b-t=B$, $g(x+t)=G(t)$, получим

$$\sum_{A\leqslant m<B} G(m)=\int_A^B G(x)\,dx+$$

$$+\sum_{r=0}^{l-1}\left(G^{(r)}(B)\,b_{r+1}(-B)-G^{(r)}(A)\,b_{r+1}(-A)\right)-\int_A^B G^{(l)}(x)\,b_l(-x)\,dx.$$

1.2) Так как обе части равенства аддитивны, то достаточно рассмотреть случай

$$w\leqslant A<B\leqslant w+1,$$

где w — некоторое целое число.

1.3) Без ограничения общности можно считать $w=0$ (как в 1.1).

2) Лемма верна при $l=1$, т. е.

$$G(0)=\int_A^B G(x)\,dx+G(B)\,b_1(-B)-G(0)\,b_1(0)-$$

$$-\int_0^B G'(x)\,b_1(-x)\,dx \qquad \text{для } A=0 \quad (4)$$

и

$$0=\int_A^B G(x)\,dx+G(B)\,b_1(-B)-G(A)\,b_1(-A)-$$

$$-\int_A^B G'(x)\,b_1(-x)\,dx \qquad \text{для } 0<A<B\leqslant 1. \quad (5)$$

Действительно,

$$\int_A^B G'(x)\,b_1(-x)\,dx = \int_A^B G'(x)\left(-x-[-1]-\frac{1}{2}\right)dx =$$

$$= \left[\left(-x+\frac{1}{2}\right)G(x)\right]_A^B + \int_A^B G(x)\,dx =$$

$$= \int_A^B G(x)\,dx + \left(-B+\frac{1}{2}\right)G(B) - \left(-A+\frac{1}{2}\right)G(A) =$$

$$= \int_A^B G(x)\,dx + b_1(-B)\,G(B) -$$

$$-b_1(-A)\,G(A) - \begin{cases} 0, & \text{если} \quad A \neq 0, \\ G(A), & \text{если} \quad A = 0, \end{cases}$$

так как $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1 = b_1(0) + 1$.

3) Индукция. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_A^B G^{(l)}(x)\,b_l(t-x)\,dx = G^{(l)}(B)\,b_{l+1}(t-B) - G^{(l)}(A)\,b_{l+1}(t-A) +$$

$$+ \int_A^B G^{(l+1)}(x)\,b_{l+1}(t-x)\,dx.$$

Лемма доказана.

Лемма 7.3. $b_l(x)$ — функция с ограниченной вариацией на всяком конечном интервале.

Доказательство. Лемма очевидна для $l=1$, так как на (0.1) $b_1(x)$ есть разность двух монотонных функций. В общем случае утверждение следует из свойства интегралов.

Лемма 7.4. Для $x \neq [x]$

$$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть интервал $0 < x < 1$. Так как

$$\log(1-z) = -\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots\right),$$

то действительная часть $\frac{1}{2\pi i}\log\left(1-e^{2\pi ix}\right)$ равна правой части равенства в лемме. Далее, действительная часть $\frac{1}{\pi i}\log\left(1-e^{2\pi ix}\right)$ равна

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin 2\pi x}{1-\cos 2\pi x} = x - \frac{1}{2}.$$

Лемма 7.5. Пусть $b > a$, а $f(x)$ — многочлен k-ой степени. Пусть $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда

$$\left| \sum_{a \leqslant x \leqslant b} e^{2\pi i f(x)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| \leqslant c(k).$$

Доказательство. Сначала мы оценим интеграл

$$\int_a^b f'(x)\, e^{2\pi i\, (f(x) \pm mx)}\, dx,$$

где m — положительное целое число. Так как $f(x)$ многочлен k-ой степени, то интервал можно разбить не более чем на $2k$ частей, в каждой из которых $f'(x)$ монотонна и не меняет знака. Предположим, что $f'(x)$ возрастает и положительна. Тогда, применяя вторую теорему о среднем значении отдельно к действительной и мнимой частям, получим

$$\left| \int_a^b f'(x)\, e^{2\pi i\, (f(x) \pm mx)}\, dx \right| = \left| \int_a^b \frac{f'(x)}{m \pm f'(x)}\, d e^{2\pi i\, (f(x) \pm mx)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{1}{2}}{m \pm \frac{1}{2}}\, 2\sqrt{2} = O\left(\frac{1}{m}\right),$$

так как $\frac{f'(x)}{m \pm f'(x)}$ есть положительная возрастающая функция от x. Аналогичные результаты получаются и в других случаях. Итак,

$$\int_a^b f'(x)\, e^{2\pi i\, (f(x) \pm mx)}\, dx = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Следовательно,

$$\int_a^b e^{2\pi i f(x)} f'(x) \sin 2\pi m x\, dx = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Далее, в силу леммы 7.4, имеем

$$\left| \int_a^b e^{2\pi i f(x)} f'(x)\, b_1(-x)\, dx \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_a^b e^{2\pi i f(x)} f'(x) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2mx\pi}{m}\, dx \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_a^b e^{2\pi i f(x)} f'(x) \sin 2\pi m x\, dx \right| =$$

$$= O\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) = O(1).$$

[Почленное интегрирование законно в силу ограниченной сходимости ряда для $b(-x)$.]

Наконец, наша лемма получается по эйлеровой формуле суммирования.

Лемма 7.6. Пусть $\Psi_1(x)=e^{x^k}$. Тогда

$$\Psi_1^{(r)}(x)=e^{x^k}F_r(x),$$

где $F_r(x)$ — многочлен степени $(k-1)r$.

Доказательство леммы получается сразу по индукции.

Лемма 7.7. Пусть $\Psi(x)=e(\beta A(qx)^k)$. Если $q\leqslant c_1(k)P^{1-\varepsilon}$, $|\beta|\leqslant c_2(k)q^{-1}P^{-k+1-\varepsilon}$ и $0\leqslant x\leqslant P/q$, то

$$|\Psi^{(r)}(x)|\leqslant c_3(A,\varepsilon,r,k)P^{-r\varepsilon}.$$

Доказательство. По лемме 7.6, имеем

$$|\Psi^{(r)}(x)|=|\Psi(x)F_r((2\pi\beta A)^a qx)((2\pi i\beta A)^a q)^r|\leqslant$$
$$\leqslant c_4(A,\varepsilon,r,k)(1+(|\beta|^a qx)^{(k-1)r})(|\beta|^a q)^r\leqslant$$
$$\leqslant c_3(A,\varepsilon,r,k)P^{-r\varepsilon},$$

так как

$$|\beta|^a q\leqslant(c_2(k))^a q^{1-a}P^{-1+a-\varepsilon a}\leqslant$$
$$\leqslant(c_2(k))^a(c_1(k))^{1-a}P^{(1-\varepsilon)(1-a)-1-a-\varepsilon a}$$

и

$$(|\beta|^a q)^k x^{k-1}\leqslant|\beta|q^k\left(\frac{P}{q}\right)^{k-1}\leqslant c_2(k)P^{-\varepsilon}.$$

Лемма 7.8. При тех же предположениях, что и в лемме 7.7, пусть $f(x)=A_kx^k+\cdots+A_1x+A_0$ и $\Phi(x)=e(\beta f(qx))$. Тогда

$$|\Phi^{(r)}(x)|\leqslant c_5(A_k,\ldots,A_0,\varepsilon,r,k)P^{-r\varepsilon}.$$

Доказательство. Лемма очевидна для $k=1$. Пусть

$$\Phi(x)=\Psi(x)\Phi_1(x),\quad \Phi_1(x)=e(\beta f(qx)-A_k(qx)^k).$$

Допустим, что лемма верна для $k-1$, т. е. при $|\beta|\leqslant q^{-1}P^{-k+2-\varepsilon}$ имеем

$$|\Phi_1^{(r)}(x)|\leqslant c_6(A_{k-1},\ldots,A_0,\varepsilon,r,k)P^{-r\varepsilon}.$$

Так как $q^{-1}P^{-k+2-\varepsilon}>q^{-1}P^{-k+1-\varepsilon}$, то

$$|\Phi_1^{(r)}(x)|\leqslant c_6P^{-r\varepsilon}\quad\text{для } |\beta|\leqslant q^{-1}P^{-k+1-\varepsilon}.$$

Далее, в силу

$$\Phi^{(r)}(x)=\Psi^{(r)}(x)\Phi_1(x)+\binom{r}{1}\Psi^{(r-1)}(x)\Phi_1'(x)+\ldots+\Psi(x)\Phi_1^{(r)}(x),$$

имеем

$$|\Phi^{(t)}(x)| \leqslant c_5 P^{-r\epsilon}.$$

3. Разбиение Фарея (Farey)

Для всякого α из интервала $-\frac{1}{\tau} \leqslant \alpha \leqslant 1 - \frac{1}{\tau}$ существует, согласно лемме 7.1, такая пара целых чисел h и q, что

$$\left|\alpha - \frac{h}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad 0 < q < \tau, \quad (h, q) = 1,$$

где $\tau = p^{k-1+\epsilon}$.

С рациональной точкой $\frac{h}{q}$ из $\left(-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right)$ оказывается связанным интервал

$$\left|\alpha - \frac{h}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Пусть $\mathfrak{M}(h, q)$ обозначает такой интервал с $q \leqslant p^{1-\epsilon}$. Часть интервала $\left(-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right)$, которая не принадлежит ни к какому $\mathfrak{M}(h, q)$, обозначим через E.

Никакие два $\mathfrak{M}(h, q)$ не перекрываются. В самом деле, допустим, что

$$\alpha = \frac{h}{q} + \beta, \quad \alpha = \frac{h_1}{q_1} + \beta_1, \quad |\beta| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad |\beta_1| \leqslant \frac{1}{q_1\tau}.$$

Тогда

$$\left|\frac{h_1}{q_1} - \frac{h}{q}\right| = |\beta_1 - \beta|, \quad \text{т. е. } \frac{1}{q_1 q} \leqslant \frac{1}{q\tau} + \frac{1}{q_1\tau}, \quad 1 \leqslant \frac{q_1 + q}{\tau}.$$

Для больших P это тоже невозможно, поэтому

$$I_{2t}(P) = \int_0^1 |T(\alpha)|^{2t} d\alpha = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} |T(\alpha)|^{2t} d\alpha \quad \left(T(\alpha) = \sum_{x=1}^{P} e(f(x)\alpha)\right),$$

$$I_{2t}(P) = \int_E |T(\alpha)|^{2t} d\alpha + \sum_{q \leqslant P^{1-\epsilon}} \sum_{\substack{h=1 \\ (h, q=1)}}^{q} \int_{\mathfrak{M}(h,q)} |T(\alpha)|^{2t} d\alpha.$$

4. Оценка интеграла, распространенного по E

Лемма 7.9. Для

$$2t > k^3(\log k + 2.2 \log\log k) - 4, \quad k \geqslant 14,$$

имеем

$$\int_E |T(\alpha)|^{2t} d\alpha \leqslant P^{2t-k}.$$

Доказательство. По теоремам 8 и 9,

$$\int_E |T(\alpha)|^{2t}\,d\alpha \ll P^{(1-\rho)(2t-bn)} \int_0^1 |T(\alpha)|^{bn}\,d\alpha \ll$$

$$\ll P^{(1-\rho)(2t-bn)+bn-k+\frac{1}{2}k(k-1)\sigma+\varepsilon}.$$

Возьмем

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{1}{2}k(k+1)\log k^2\right)}{-\log(1-a)} + 1\right].$$

Тогда

$$n \leqslant \frac{k\log\left(\frac{1}{2}k(k+1)\log k^2\right)}{1+\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a^2+\ldots} + 1 <$$

$$< \left(1-\frac{1}{2}a\right)k\log(k^2\log k) + 1 < k\log(k^2\log k) - \log k + 1 <$$

$$< k\log(k^2\log k) - 1;$$

$$\frac{1}{2}k(k+1)(1-a)^n \leqslant \frac{1}{2\log k};$$

$$bn < \frac{1}{2}(k+1)(k+2)k\log(k^2\log k) - 4 =$$

$$= k^3\log k\left(1+\frac{\log\log k}{\log k}\left(\frac{\log k}{\log\log k}(3a+2a^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}(1+3a+2a^2)\right)\right) - 4.$$

Так как при $k \geqslant 14$

$$\frac{\log k}{\log\log k}(3a+2a^2) + \frac{1}{2}(1+3a+2a^2) <$$

$$< 0.612 + 0.613 < 1.23,$$

то

$$bn < k^3\log k\left(1 + 1.23\frac{\log\log k}{\log k}\right) - 4.$$

Далее,

$$-\rho(2t-bn) + \frac{1}{2\log k} + \varepsilon <$$

$$< -2\frac{(\log k + 2.2\log\log k) - (\log k + 1.23\log\log k)}{\log k^2 + 2.2\log\log k^2} + \frac{1}{2\log k} =$$

$$= -\frac{1}{2\log k}\left(\frac{1.94\log\log k}{1+2.2\log\log k^2/\log k^2} - 1\right) < -\frac{0.11}{2\log k}.$$

Получаем таким образом нашу лемму.

5. Леммы, относящиеся к $\mathfrak{M}(h, q)$

Пусть

$$T^*(\alpha, h, q) = \bar{q}^{-1} S_{h,q} \int_0^P e(f(y)\beta)\, dy,$$

где

$$S_{h,q} = \sum_{v=1}^{\bar{q}} e_q(hf(v)), \quad \bar{q} = q(q, d),$$

а d — наименьший общий знаменатель коэффициентов $f(x)$.

Лемма 7.10.

$$T^*(\alpha, h, q) = O(q^{-a+\varepsilon} \min(P, |\beta|^{-a})).$$

Доказательство. Так как, по теореме 1 (следствие 1.2),

$$S_{h,q} = O(q^{1-a+\varepsilon})$$

и $\int_0^P e(\beta f(y))\, dy = O(P)$, то достаточно доказать, что при $|\beta|^{-a} \leqslant P$

$$\int_0^P e(\beta f(y))\, dy = O(|\beta|^{-a}).$$

Существует такое c, что

$$f(y + c) = g(y)$$

есть многочлен относительно y с положительными коэффициентами, тогда

$$\int_c^P e(\beta f(y))\, dy = \int_0^{P-c} e(\beta g(y))\, dy.$$

Рассмотрим $w = |\beta| g(y)$. Тогда y есть возрастающая функция от w. Пусть $w_0 = |\beta| g(P - c)$. Тогда, по второй теореме о среднем значении,

$$\int^{W_0} \frac{e^{\pm 2\pi i w}}{|\beta| g'(y)}\, dw = O\left(\frac{1}{|\beta| g'(y)}\right)_{w=w_0} = O\left(\frac{1}{|\beta| P^{k-1}}\right) = O\left(\frac{1}{|\beta|^a}\right).$$

Лемма 7.11. Пусть $\alpha = \frac{h}{q} + \beta$. Если $q \leqslant P^{1-\varepsilon}$ и $|\beta| \leqslant q^{-1} P^{-k+1-\varepsilon}$, то

$$T(\alpha) - T^*(\alpha, h, q) = O(q^{1-a+\varepsilon}).$$

Доказательство. Имеем

$$T(\alpha)=\sum_{x=0}^{P} e(f(x)\alpha)=$$

$$=\sum_{v=1}^{\overline{q}}\sum_{\substack{0\le r<P\\ r\equiv v\,(\overline{q})}} e\left(\frac{h}{q}f(r)\right)e\big(\beta f(r)\big)=$$

$$=\sum_{v=1}^{\overline{q}} e(hf(v)/q)\,\Lambda_v,$$

где

$$\Lambda_v=\sum_{\substack{j\\ 0\le\overline{q}j+v\le P}} e(\beta f(\overline{q}j+v))=\sum_{\substack{j\\ 0\le j+\frac{v}{\overline{q}}<\frac{P}{\overline{q}}}}\Phi\left(j+\frac{v}{\overline{q}}\right)$$

и

$$\Phi(x)=e(\beta f(\overline{q}\,x)).$$

По эйлеровой формуле суммирования, имеем

$$\Lambda_v=\int_0^{P/\overline{q}}\Phi(x)\,dx+\sum_{r=1}^{l-1}\left(\Phi^{(r)}\left(\frac{P}{\overline{q}}\right)b_{r+1}\left(\frac{v}{\overline{q}}-\frac{P}{\overline{q}}\right)-\Phi^{(r)}(0)\,b_{r+1}\left(\frac{v}{\overline{q}}\right)\right)-$$

$$-\int_0^{P/\overline{q}}\Phi^{(l)}(x)\,b_l\left(\frac{v}{\overline{q}}-x\right)dx.$$

Так как

$$\int_0^{P/\overline{q}}\Phi(x)\,dx=\int_0^{P/\overline{q}}e(\beta f(\overline{q}x))\,dx=\frac{1}{\overline{q}}\int_0^{P}e(\beta f(y))\,dy,$$

то

$$T(\alpha)=T^*(\alpha,h,q)+\sum_{r=1}^{l-1}\left(\Phi^{(r)}\left(\frac{P}{\overline{q}}\right)a_{r+1}\left(\frac{P}{\overline{q}}\right)-\Phi^{(r)}(0)\,a_{r+1}(0)\right)-R,$$

где

$$a_{r+1}(t)=\sum_{v=1}^{\overline{q}}e_q(hf(v))\,b_{r+1}\left(\frac{v}{\overline{q}}-t\right)$$

и

$$R=\sum_{v=1}^{\overline{q}}e_q(hf(v))\int_0^{P/\overline{q}}\Phi^{(l)}(x)\,b_l\left(\frac{v}{\overline{q}}-x\right)dx.$$

Возьмем теперь $l=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, тогда, по лемме 7.8,

$$\Phi^{(l)}(x) \ll P^{-1},$$

$$R=O\left(\bar{q}\int\limits_0^{P/\bar{q}} P^{-1}\,dx\right)=O(1).$$

Пусть

$$s_v=\sum_{x=1}^{v} e_q(hf(x)).$$

Тогда

$$a_{r+1}(t)=s_1 b_{r+1}\left(\frac{1}{q}-t\right)+\sum_{v=2}^{\bar{q}}\left(s_v-s_{v-1}\right) b_{r+1}\left(\frac{v}{\bar{q}}-t\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\bar{q}-1} s_m\left(b_{r+1}\left(\frac{m}{\bar{q}}-t\right)-b_{r+1}\left(\frac{m+1}{\bar{q}}-t\right)\right)+s_{\bar{q}}\, b_{r+1}\left(1-t\right).$$

По теореме 2, имеем

$$s_v=O\left(q^{1-a+\varepsilon}\right).$$

Тогда

$$\left|a_{r+1}(t)\right| \ll q^{1-a+\varepsilon}\left(\sum_{m=1}^{\bar{q}-1}\left|b_{r+1}\left(\frac{m}{\bar{q}}-t\right)-b_{r+1}\left(\frac{m+1}{\bar{q}}-t\right)\right|+1\right) \ll$$

$$\ll q^{1-a+\varepsilon},$$

так как $b_{r+1}(x)$ — функция с ограниченной вариацией. Поэтому, в силу леммы 7.8,

$$T(\alpha)-T^*(\alpha, h, q) \ll\left(\sum_{r=1}^{l-1} P^{-r+\varepsilon}+1\right) q^{1-a+\varepsilon} \ll$$

$$\ll q^{1-a+\varepsilon}.$$

6. Оценка интеграла, распространенного по $\mathfrak{M}(h, q)$

Лемма 7.12. При $2t>2k+1$ имеем

$$\sum_{\mathfrak{M}}\int_{\mathfrak{M}}|T(\alpha)|^{2t}\, d\alpha=O\left(P^{2t-k}\right).$$

Доказательство. В силу леммы 7.10 и 7.11, имеем на $\mathfrak{M}(h, q)$

$$T(\alpha)=O\left(q^{-a+\varepsilon} \min\left(P,|\beta|^{-a}\right)\right)+O\left(q^{1-a+\varepsilon}\right)=$$

$$=O\left(q^{-a+\varepsilon} \min\left(P,|\beta|^{-a}\right)\right).$$

Рассматриваемая в лемме сумма не превосходит

$$\ll \sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} q^{-2ta+\varepsilon} \min(P^{2t}, |\beta|^{-2ta})\, d\beta \ll$$

$$\ll \sum_{q \leqslant P^{l+\varepsilon}} \sum_{h=1}^{q} q^{-2ta+\varepsilon} \left(\int_{0}^{P^{-k}} P^{2t}\, d\beta + \int_{P^{-k}} \beta^{-2ta}\, d\beta \right) \ll$$

$$\ll P^{2t-k} \sum_{q \leqslant P^{l+\varepsilon}} q^{1-2ta+\varepsilon} \ll$$

$$\ll P^{2t-k},$$

так как $\sum q^{1-2ta}$ сходится.

Лемма 7.13. Если $k \geqslant 14$ и

$$2t > k^3(\log k + 2.2 \log\log k) - 4,$$

то

$$I_{2t}(P) = O(P^{2t-k}).$$

Доказательство. См. леммы 7.9 и 7.12.

7. Леммы, необходимые для доказательства теоремы

Пусть $N = f(P)$,

$$\mathfrak{T}(\alpha) = \sum_{p \leqslant P} e(f(p)\alpha),$$

$$\mathfrak{T}^*(\alpha, h, q) = \frac{1}{A^a} \frac{W_{h,q}}{\varphi(q)} \sum_{2 \leqslant n \leqslant f(p)} \frac{e(n\beta)}{n^{1-a} \log n},$$

где A — старший коэффициент $f(x)$, а $W_{h,q}$ определено в начале этой главы.

Разделим интервал $-\frac{1}{\tau} \leqslant \alpha \leqslant 1 - \frac{1}{\tau}$ так же, как это делалось в п. 3 с $q \leqslant \tau = NL^{-\sigma}$, где σ выбрано так, чтобы σ_0 в теореме 10 была бы больше, чем постоянное $c_2(k,k)$ в теореме 4 плюс некоторое целое s_1.

Пусть $\mathfrak{M}(h,q)$ означает интервал

$$\left|\alpha - \frac{h}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}$$

с $q \leqslant L^{\sigma}$. Пусть E означает часть $\left(-\frac{1}{\tau},\ 1 - \frac{1}{\tau}\right)$, остающуюся после исключения $\mathfrak{M}(h, q)$. Легко доказать, как и выше, что никакие два $\mathfrak{M}(h, q)$ не перекрываются.

Лемма 7.14 (Siegel—Walfisz).[1] Если $q \leqslant L^c$, $(l, q) = 1$, $n \leqslant P$, то число простых чисел $\leqslant n$ в арифметической прогрессии $l + qx$ есть

$$\pi(n; l, q) = \frac{1}{\varphi(q)} \operatorname{li} n + O\left(Pe^{-c_1\sqrt{L}}\right),$$

где $\operatorname{li} x = \int\limits_2^x \frac{dx}{\log x}$, а постоянное в символе O не зависит от q.

Лемма 7.15. На $\mathfrak{M}(h, q)$ мы имеем

$$\mathfrak{T}(\alpha) - \mathfrak{T}^*(\alpha, h, q) = O\left(Pe^{-c_2\sqrt{L}}\right).$$

Доказательство. Пишем $\alpha = \frac{h}{q} + \beta$. Пусть

$$S_n = \sum_{f(p) \leqslant n} e_q(hf(p)), \quad n \leqslant N.$$

Тогда

$$S_n = \sum_{\substack{l=1 \\ (l, q) = 1}}^{q} e_q(hf(l))\, \pi(n'; l, q) + O(q^{\varepsilon}),$$

где n' — наибольший положительный корень уравнения $f(x) = n$ (так как n достаточно велико, то n' существует и единственно).
Тогда имеем

$$\left| n' - \left(\frac{n}{A}\right)^a \right| = O(1).$$

В самом деле,

$$n' - \left(\frac{n}{A}\right)^a = n' - \left(\frac{f(n')}{A}\right)^a = n' - (n'^k + O(n'^{k-1}))^a =$$

$$= n'\left(1 - (1 + O(n'^{-1}))^a\right) = O(1).$$

По теореме Siegel-Walfisz, для достаточно большого n имеем

$$\pi(n'; l, q) = \frac{1}{\varphi(q)} \operatorname{li} n' + O\left(Pe^{-c_1\sqrt{L}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(q)} \operatorname{li}\left(\frac{n}{A}\right)^a + O\left(Pe^{-c_1\sqrt{L}}\right).$$

---

[1] Math. Zs., 40 (1936), 592—601. Hilfsatz 3

Последнее равенство справедливо при всех $n' \leqslant P$. Следовательно,

$$S_n = \sum_{\substack{l=1\\(l,\,\overline{q})=1}}^{\overline{q}} e_q(hf(l))\left(\frac{1}{\varphi(\overline{q})}\,\mathrm{li}\left(\frac{n}{A}\right)^a + O\left(Pe^{-c_1\sqrt{L}}\right)\right) + O(q^{\varepsilon}) =$$

$$= \sum_{\substack{l=1\\(l,\,\overline{q})=1}}^{\overline{q}} \frac{e_q(hf(l))}{\varphi(\overline{q})}\,\mathrm{li}\left(\frac{n}{A}\right)^a + O\left(Pe^{-c_2\sqrt{L}}\right) =$$

$$= \frac{W_{h,q}}{\varphi(\overline{q})}\,\mathrm{li}\left(\frac{n}{A}\right)^a + O\left(Pe^{-c_2\sqrt{L}}\right).$$

Поэтому

$$\mathfrak{T}(\alpha) = \sum_{n=2}^{N} (S_n - S_{n-1})\,e(n\beta) + O(1) =$$

$$= \sum_{n=2}^{N} S_n\,(e(n\beta) - e((n-1)\beta)) - S_N e((N+1)\beta) + O(1) =$$

$$= \frac{w_{hq}}{\varphi(\overline{q})}\left(\sum_{n=2}^{N} \mathrm{li}\left(\frac{n}{A}\right)^a (e(n\beta) - e((n+1)\beta)) + \mathrm{li}\left(\frac{N}{A}\right)^a e((N+1)\beta)\right) +$$

$$+ O\left(Pe^{-c_4\sqrt{L}}\right),$$

откуда следует требуемый результат, так как

$$\mathrm{li}\left(\frac{n}{A}\right)^a - \mathrm{li}\left(\frac{n-1}{A}\right)^a = \int\limits_{((n-1)/A)^a}^{(n/A)^a} \frac{dx}{\log x} =$$

$$= A^{-a}\int\limits_{(n-1)^a}^{n^a} \frac{dy}{\log(yA^{-a})} = \frac{1}{A^a n^{1-a}\log n} + O\left(\frac{1}{n^{2-a}\log n}\right).$$

Лемма 7.16. Если $|\beta| \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$\mathfrak{T}^*(\alpha, h, q) = O\left(q^{-a+\varepsilon}\min(P, |\beta|^{-a})\right).$$

Аналогичный результат имеет место для $\mathfrak{T}(\alpha)$ на $\mathfrak{M}(h, q)$.

Доказательство. Согласно следствию 1.3 из теоремы 1, имеем

$$\mathfrak{T}^*(\alpha, h, q) = O\left(q^{-a+\varepsilon}\sum_{n \leqslant f(P)} \frac{1}{n^{1-a}}\right) =$$

$$= O(q^{-a+\varepsilon}P),$$

так как $\Phi(q) \geqslant \frac{q}{d(q)} \geqslant q^{1-\varepsilon}$. Далее,

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{e(n\beta)}{n^{1-a}\log n} = \sum_{n \leqslant |\beta|^{-1}} \frac{e(n\beta)}{n^{1-a}\log n} + \sum_{n > |\beta|^{-1}} \frac{e(n\beta)}{n^{1-a}\log n}.$$

Суммы справа обозначим соответственно через $\sum_1$ и $\sum_2$. Очевидно,

$$\left|\sum\nolimits_1\right| \leqslant \sum_{n \leqslant |\beta|^{-1}} \frac{1}{n^{1-a}\log n} = O(|\beta|^{-a}).$$

Далее, суммируя по частям, получаем

$$\left|\sum\nolimits_2\right| = \left|\sum_{n > |\beta|^{-1}} \frac{e(n\beta)}{n^{1-a}\log n}\right| = \left|\sum_{n > |\beta|^{-1}} \frac{S_n - S_{n-1}}{n^{1-a}\log n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n > |\beta|^{-1}} |S_n| \left(\frac{1}{n^{1-a}\log n} - \frac{1}{(n+1)^{1-a}\log(n+1)}\right),$$

где $S_n = \sum_{|\beta|^{-1} < m < n} e(m\beta)$. Так как $|S_n| \leqslant \frac{1}{\beta}$, то

$$\left|\sum\nolimits_2\right| \leqslant \sum_{n > |\beta|^{-1}} \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{n^{1-a}\log n} - \frac{1}{(n+1)^{1-a}\log(n+1)}\right) \ll |\beta|^{-a}.$$

В силу леммы 7.15,

$$\mathfrak{T}(\alpha) = \mathfrak{T}^*(\alpha, h, q) + O\left(Pe^{-c_1\sqrt{L}}\right).$$

Так как $Pe^{-c_2\sqrt{L}} \ll P$, $\quad Pe^{-c_2\sqrt{L}} \ll |\beta|^{-a}$, то

$$\mathfrak{T}(\alpha) = O\left(q^{-a+\varepsilon}\min\left(P|\beta|^{-a}\right)\right).$$

8. Доказательство теоремы

Мы установим несколько видоизмененную теорему.

Теорема 11. Если

$$s \geqslant \begin{cases} 2^k + 1 & \text{при } 1 \leqslant k < 14, \\ k^3(\log k + 2.2\log\log k) & \text{при } 14 \leqslant k, \end{cases}$$

то, для любого заданного целого числа s_1,

$$|I_s(N) - A^{-sa}\mathfrak{S}(N)\Psi(N)| \leqslant \frac{c\,(k, s_1, \text{коэффициенты } f(x))\,N^{sa-1}}{(\log N)^{s_1}},$$

где

$$\Psi(N) = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_s=N \\ n_\nu \geqslant 2}} \frac{1}{n_1^{1-a}\log n_1 \ldots n_s^{1-a}\log n_s}.$$

Доказательство. 1) Имеем

$$I_s(N) = \int_0^1 \mathfrak{T}^s(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} \mathfrak{T}^s(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int_E \mathfrak{T}^s(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha + \sum_{\mathfrak{M}(h,q)} \int_{\mathfrak{M}(h,q)} \mathfrak{T}^s(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha.$$

2) Пусть $k \geqslant 14$. Так как $s > k^3(\log k + 2.2\log\log k)$, то можно выбрать такое целое число t, что

$$s - 2t \geqslant 1, \quad 2t > k^3(\log k + 2.2\log\log k) - 4.$$

В силу теоремы 10 и леммы 7.13, имеем

$$\int_E \mathfrak{T}^s(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha \ll \left(PL^{-a_0}\right)^{s-2t} \int_0^1 |\mathfrak{T}(\alpha)|^{2t} d\alpha \ll$$

$$\ll P^{s-2t} L^{-s_1} \int_0^1 |T(\alpha)|^{2t} d\alpha \ll$$

$$\ll P^{s-k} L^{-s_1}.$$

При $1 \leqslant k < 14$ имеем, по теореме 4,

$$\int_E (\mathfrak{T}(\alpha))^{2^k+1} e(-N\alpha)\, d\alpha \ll PL^{-s_1-c_2(k,k)} \int_0^1 |T(\alpha)|^{2^k} d\alpha \ll$$

$$\ll P^{2^k-k+1} L^{-s_1}$$

(ср. выбор c).

3) В силу лемм 7.15, 7.16 и простого неравенства

$$|\xi^s - \eta^s| \leqslant s|\xi - \eta| \max\left(|\xi|^{s-1}, |\eta|^{s-1}\right),$$

имеем на $\mathfrak{M}(h,q)$:

$$|\mathfrak{T}^s(\alpha) - \mathfrak{T}^{*s}(\alpha,h,q)| \leqslant |\mathfrak{T}(\alpha) - \mathfrak{T}^*(\alpha,h,q)| \max\left(|\mathfrak{T}(\alpha)|^{s-1},\right.$$

$$\left.|\mathfrak{T}^*(\alpha,h,q)|^{s-1}\right) \ll Pe^{-c_3\sqrt{L}}\left(q^{-a+\varepsilon}\right)^{s-1} \min\left(P, |\beta|^{-a}\right)^{s-1}.$$

Интегрируя по множеству $\mathfrak{M}(h, q)$, получаем

$$\int\limits_{\mathfrak{M}(h,q)} \mathfrak{T}^s(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha - \int\limits_{\mathfrak{M}(h,q)} \mathfrak{T}^{*s}(\alpha, h, q)\, e(-N\alpha)\, d\alpha \ll$$

$$\ll P e^{-c_2\sqrt{L}}\, q^{-a(s-1)+\varepsilon} \left(\int\limits_0^{P^{-k}} P^{s-1}\, d\beta + \int\limits_{P^{-k}} \beta^{-a(s-1)}\, d\beta \right) \ll$$

$$\ll q^{-a(s-1)+\varepsilon}\, P^{s-k}\, e^{-c_2\sqrt{L}}.$$

Суммируя по всем $\mathfrak{M}(h, q)$, получаем

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int\limits_{\mathfrak{M}} \mathfrak{T}^s(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha - \sum_{\mathfrak{M}} \int\limits_{\mathfrak{M}} \mathfrak{T}^{*s}(\alpha, h, q)\, e(-N\alpha)\, d\alpha \ll$$

$$\ll P^{s-k}\, e^{-c_2\sqrt{L}} \sum_{q \leqslant L^{\sigma}} q \cdot q^{-a(s-1)} \ll$$

$$\ll P^{s-k}\, e^{-c_3\sqrt{L}}.$$

4) В силу леммы 7.16 имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{M}(h,q)} \mathfrak{T}^{*s}(\alpha, h, q)\, e(-N\alpha)\, d\alpha - \int\limits_0^1 \mathfrak{T}^{*s}(\alpha, h, q)\, e(-N\alpha)\, d\beta \ll$$

$$\ll q^{-as+\varepsilon} \int\limits_{q^{-1}\tau^{-1}}^{\infty} \beta^{-as}\, d\beta \ll$$

$$\ll q^{-1+\varepsilon}\, P^{s-k}\, L^{-\sigma(sa-1)}.$$

Поэтому

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int\limits_{\mathfrak{M}} \mathfrak{T}^{*s}(\alpha, h, q)\, e(-N\alpha)\, d\alpha - \sum_{\mathfrak{M}} \int\limits_0^1 \mathfrak{T}^{*s}(\alpha, h, q)\, e(-N\alpha)\, d\beta \ll$$

$$\ll P^{s-k}\, L^{-\sigma(sa-1)} \sum_{q \leqslant L^{\sigma_0}} q^{\varepsilon} \ll$$

$$\ll P^{s-k}\, L^{-\sigma(sa-2)+\varepsilon} \ll P^{s-k}\, L^{-s_1}$$

$\left(\text{так как } 2s_1 < \sigma \text{ и } sa - 2 \geqslant \frac{1}{2}\right)$.

5) Имеем

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_0^1 \mathfrak{T}^{*s}(\alpha, h, q)\, e(-N\alpha)\, d\beta =$$

$$= A^{-s\alpha} \sum_{\mathfrak{M}} \left(\frac{w_{h,q}}{\varphi(\overline{q})}\right)^s e\left(-\frac{Nh}{q}\right) \int_0^1 \left(\sum_{2\leqslant n\leqslant N} \frac{e(n\beta)}{n^{1-\alpha}\log n}\right)^s e(-N\beta)\, d\beta =$$

$$= A^{-s\alpha} \sum_{q\leqslant L^\sigma} \sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{q} \left(\frac{w_{h,q}}{\varphi(\overline{q})}\right)^s e\left(-\frac{Nh}{q}\right) \Psi(N),$$

где $\Psi(N)$ определено, как в теореме 11′.

6) Имеем

$$\left|\sum_{q>L^\sigma} \sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{q} \left(\frac{w_{h,q}}{\varphi(\overline{q})}\right)^s e\left(-\frac{Nh}{q}\right)\right| \ll \sum_{q>L^\sigma} q\cdot q^{-s\alpha+\varepsilon} \ll$$

$$\ll L^{(2-s\alpha)\sigma+\varepsilon} \ll L^{-s_1}.$$

Поэтому

$$\sum_{q\leqslant L^\sigma} \sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{q} \left(\frac{w_{h,q}}{\varphi(\overline{q})}\right)^s e\left(-\frac{Nh}{q}\right) = \mathfrak{S}(N) + O(L^{-s_1}).$$

7) В силу результатов пунктов 3), 4), 5) и 6), имеем

$$\sum_{\mathfrak{M}_{(h,q)}} \int_{\mathfrak{M}_{(h,q)}} \mathfrak{T}^{*s}(\alpha, h, q)\, e(-N\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \mathfrak{S}(N) A^{-s\alpha} \Psi(N) + O(N^{s\alpha-1} L^{-s_1}),$$

а в силу пунктов 1) и 2),

$$I_s(N) = \mathfrak{S}(N) A^{-s\alpha} \Psi(N) + O(N^{s\alpha-1} L^{-s_1}).$$

9. Окончание доказательства теоремы 11

Лемма 7.17. При $0<\lambda_1<1$ и $\lambda_2\geqslant\lambda_1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{1-\lambda_1}(N-n)^{1-\lambda_2}} = \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)} N^{\lambda_1+\lambda_2-1}(1+O(N^{-\lambda_1})).$$

Доказательство. Пишем

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{1-\lambda_1}(N-n)^{1-\lambda_2}} = N^{\lambda_1+\lambda_2-1} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\frac{1}{N}}{\left(\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_1}\left(1-\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_2}}.$$

Для $\frac{n}{N} \leqslant x \leqslant \frac{n+1}{N}$, полагая $x = \frac{n}{N} + \frac{\theta}{N}\,(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$, имеем

$$\frac{1}{\left(\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_1}\left(1-\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_2}} - \frac{1}{x^{1-\lambda_1}(1-x)^{1-\lambda_2}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_1}\left(1-\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_2}}\left(1-\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^{\lambda_1-1}\left(1-\frac{\theta}{N-n}\right)^{\lambda_2-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_1}\left(1-\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_2}}\left(O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{N-n}\right)\right).$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{1-\lambda_1}(N-n)^{1-\lambda_2}} = N^{\lambda_1+\lambda_2-1}\left(\int\limits_0^1 x^{\lambda_1-1}(1-x)^{\lambda_2-1}\,dx + \right.$$

$$\left. + O\left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\frac{n}{nN}}{\left(\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_1}\left(1-\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_2}}\right) + O\left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\frac{1}{n(N-n)}}{\left(\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_1}\left(1-\frac{n}{N}\right)^{1-\lambda_2}}\right)\right) =$$

$$= N^{\lambda_1+\lambda_2-1}\left(\frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)} + O\left(N^{1-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^{2-\lambda_1}(N-n)^{1-\lambda_2}}\right) + \right.$$

$$\left. + O\left(N^{1-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^{1-\lambda_1}(N-n)^{2-\lambda_2}}\right)\right).$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^{2-\lambda_1}(N-n)^{1-\lambda_2}} = \sum_{n \leqslant \frac{N}{2}} \frac{1}{n^{2-\lambda_1}(N-n)^{1-\lambda_2}} +$$

$$+ \sum_{N > n > \frac{N}{2}} \frac{1}{n^{2-\lambda_1}(N-n)^{1-\lambda_2}} \ll$$

$$\ll N^{\lambda_2-1}\sum_{n \leqslant \frac{1}{2}N}\frac{1}{n^{2-\lambda_1}} + N^{\lambda-2}\sum_{N > n > \frac{1}{2}N}\frac{1}{(N-n)^{1-\lambda_2}} \ll$$

$$\ll N^{\lambda_2-1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^{1-\lambda_1}(N-n)^{2-\lambda_2}} \ll N^{\lambda_1+\lambda_2-1-\min(1,\lambda_2)}\begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_2 \neq 1 \\ \log N, & \text{если } \lambda_2 = 1, \end{cases}$$

то получаем нашу лемму.

Лемма 7.18.

$$\sum_{\substack{n_1+\ldots+n_s=N\\ n_\nu>0}} \frac{1}{n_1^{1-a}\ldots n_s^{1-a}} = \frac{\Gamma^s(a)}{\Gamma(sa)} N^{sa-1}(1+O(N^{-a})).$$

Доказательство. Лемма верна для $s=2$ в силу леммы 7.17. Предположим, что лемма верна для $s-1$. Тогда, в силу леммы 7.17,

$$\sum_{\substack{n_1+\ldots+n_s=N\\ n_\nu>0}} \frac{1}{n_1^{1-a}\ldots n_s^{1-a}} = \sum_{n_1=1}^{N-s+1} \frac{1}{n_1^{1-a}} \sum_{n_2+\ldots+n_s=N-n_1} \frac{1}{n_2^{1-a}\ldots n_s^{1-a}} =$$

$$= \sum_{n_1} \frac{1}{n_1^{1-a}} \frac{\Gamma^{s-1}(a)}{\Gamma((cs-1)a)} (N-n_1)^{(s-1)a-1} + O\left(\sum_{n_1} \frac{1}{n_1^{1-a}(N-n)^{1-(s-2)a+a}}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma^s(a)}{\Gamma(sa)} N^{sa-1}(1+O(N^{-a})).$$

Лемма 7.19.

$$\sum_{\substack{n_1+\ldots+n_s=N\\ n_\nu>1}} \frac{1}{n_1^{1-a}\log n_1\ldots n_s^{1-a}\log n_s} = \frac{\Gamma^s(a)}{\Gamma(sa)} \frac{N^{sa-1}}{L^s}\left(1+O\left(\frac{\log L}{L}\right)\right).$$

Доказательство. Пусть

$$\Psi_\nu(N) = \sum_{\substack{n_1+\ldots n_s=N\\ n_\nu>1}} \frac{1}{n_1^{1-a}\log n_1\ldots n_\nu^{1-a}\log n_\nu\cdot n_{\nu+1}^{1-a}\ldots n_s^{1-a}}, \quad 0<\nu\leqslant s.$$

Тогда

$$\Psi_\nu(N) = \frac{1}{L}\Psi_{\nu-1}(N) + O\left(\frac{\Psi_\nu(N)\log L}{L}\right) + O\left(\frac{N^{sa-1}}{L^{s+1}}\right). \qquad (1)$$

В самом деле, если мы разобьем

$$\Psi_\nu(N) = \sum_{n_\nu\leqslant NL^{-\delta}} + \sum_{n_\nu>NL^{-\delta}} = S_1 + S_2,$$

то

$$S_1 \leqslant \frac{1}{(\log 2)^s} \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_s=N\\ n_\nu\leqslant NL^{-\delta}}} \frac{1}{n_1^{1-a}\ldots n_s^{1-a}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n_\nu\leqslant NL^{-\delta}} \frac{1}{n_\nu^{1-a}} \sum_{n_1+\ldots+n_{\nu-1}+n_{\nu+1}+\ldots+n_s=N-n_\nu} \frac{1}{n_1^{1-a}\ldots n_{\nu-1}^{1-a}\, n_{\nu+1}^{1-a}\ldots n_s^{1-a}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n_\nu\leqslant NL^{-\delta}} \frac{1}{n_\nu^{1-a}} (N-n_\nu)^{(s-1)a-1} \leqslant$$

$$\leqslant N^{(s-1)a-1}(NL^{-\delta})^a = N^{sa-1}L^{-\delta a} \leqslant N^{sa-1}L^{-s-1},$$

где положено $\delta = k(s+1)$; далее,

$$S_2 = \frac{1}{L} \sum_{\substack{n_1 + \ldots + n_s = N \\ n_\nu > NL^{-\delta}}} \frac{1}{n_1^{1-a} \log n_1 \ldots n_{\nu-1}^{1-a} \log n_{\nu-1} \cdot n_\nu^{1-a} \ldots n_s^{1-a}} +$$

$$+ \sum \frac{1}{n_1^{1-a} \log n_1 \ldots n_\nu^{1-a} \ldots n_s^{1-a}} \left(\frac{1}{\log n_\nu} - \frac{1}{\log N} \right) =$$

$$= \frac{1}{L} \Psi_{\nu-1}(N) + O\left(\frac{N^{sa-1}}{L^{s+1}} \right) + O\left(\frac{\log L}{L} \Psi_\nu(N) \right).$$

В силу (1), имеем

$$\Psi_\nu(N) = \frac{1}{L} \Psi_{\nu-1}(N) + O\left(\frac{\Psi_{\nu-1}(N) \log L}{L^2} \right) + O\left(\frac{N^{sa-1}}{L^{s+1}} \right),$$

тогда

$$\Psi_s(N) = \frac{1}{L^s} \Psi_0(N) + O\left(\frac{\Psi_0(N) \log L}{L^{s+1}} \right) + O\left(\frac{N^{sa-1}}{L^{s+1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{L^s} \Psi_0(N) + O\left(\frac{N^{sa-1}}{L^{s+1}} \log L \right),$$

и лемма следует из леммы 7.8.

Теорема 11 вытекает из леммы 7.19 и теоремы 11′.

ГЛАВА VIII

Особые ряды

1.

Сейчас мы будем изучать особый ряд для частного случая $f(x)=x^k$. Пусть $p^\theta \| k$ и

$$\gamma=\begin{cases}\theta+2 & \text{при } p=2, \quad 2|k,\\ \theta+1 & \text{в других случаях,}\end{cases}$$

$$K=\prod_{(p-1)/k} p^\gamma.$$

Теорема 12. Если $s\geqslant 3k+1$ и $s\equiv N (\operatorname{mod} p^\gamma)$ при всяком p, удовлетворяющем условию $(p-1)|k$, то для $f(x)=x^k$
$\mathfrak{S}(N)\geqslant A>0$ (A не зависит от N).

2. Леммы о тригонометрических суммах

Лемма 8.1. Если $(q_1, q_2)=1$, то

$$W_{h, q_1 q_2}=W_{hq_1^{k-1}, q_2}\, W_{hq_2^{k-1}, q_1}$$

и

$$B_s(N, q_1 q_2)=B_s(N, q_1)\, B_s(N, q_2).$$

Доказательство. Пусть $l=l_1 q_2+l_2 q_1$, тогда

$$W_{h, q_1 q_2}=\sum_{\substack{l_1=1\\ (l_1, q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{l_2=1\\ (l_2, q_2)=1}}^{q_2} e_{q_1 q_2}(hq_2^k l_1^k+hq_1^k l_2^k)=$$

$$=W_{hq_1^{k-1}, q_2}\, W_{hq_2^{k-1}, q_1}.$$

Пусть, далее, $h=h_1 q_2+h_2 q_1$; имеем

$$B_s(N, q_1 q_2) = \sum_{\substack{h_1=1\\(h_1, q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{h_2=1\\(h_2, q_2)=1}}^{q_2} \left(\frac{W_{h_2 q_1^{k-1}, q_2}}{\varphi(q)_2}\right)^s \left(\frac{W_{h_1 q_2^{k-1}, q_1}}{\varphi(q_1)}\right)^s e_{q_1}(-h_1 N)\, e_{q_2}(-h_2 N) =$$

$$= \sum_{\substack{h_1=1\\(h_1, q_1)=1}}^{q_1} \left(\frac{W_{h_2, q_2}}{\varphi(q_2)}\right)^s \left(\frac{W_{h_1, q_1}}{\varphi(q_1)}\right)^s e_{q_1}(-h_1 N)\, e_{q_2}(-h_2 N) =$$

$$= B_s(N, q_1)\, B_s(N, q_2).$$

Лемма 8.2. Если

$$x \equiv y + zp^{\mu} \pmod{p^{\mu+1}},$$

где

$$\mu \geqslant \begin{cases} 1 & \text{при} \quad p > 2, \\ 2 & \text{при} \quad p = 2, \end{cases}$$

то

$$x^p \equiv y^p + y^{p-1} zp^{\mu+1} \pmod{p^{\mu+2}}.$$

Доказательство. Имеем

$$x = y + zp^{\mu} + mp^{\mu+1}.$$

Тогда

$$x \equiv (y + zp^{\mu})^p \pmod{p^{\mu+2}} \equiv$$

$$\equiv y^p + y^{p-1} zp^{\mu+1} + \frac{1}{2}(p-1)\, py^{p-2} z^2 p^{2\mu} \pmod{p^{\mu+2}},$$

так как $3\mu > \mu + 2$. Для $p > 2$ имеем

$$\frac{1}{2} p(p-1)\, y^{p+1} z^2 p^{2\mu} \equiv 0 \pmod{p^{\mu+2}}.$$

Для $p = 2$, так как $\mu \geqslant 2$, $2\mu \geqslant \mu + 2$, имеем

$$\frac{1}{2} p(p-1)\, y^{p-2} z^2 p^{2\mu} \equiv 0 \pmod{q^{\mu+2}},$$

и лемма тем самым доказана.

Лемма 8.3. Если $t > \gamma$ и $p \nmid h$, то

$$W_{h, p^t} = 0.$$

Доказательство. Пусть $l = l_1 + l_2 p^{t-\theta-1}$, тогда повторным применением леммы 8.2 получим:

$$l^{p^\theta} \equiv l_1^{p^\theta} + l_1^{p^\theta - 1} l_2 p^{t-1} \pmod{p^t}.$$

Тогда

$$l^k \equiv l_1^k + k l_1^{k-1} l_2\, p^{t-\theta-1} \pmod{p^t}.$$

Следовательно,

$$W_{a,p^t}=\sum_{\substack{l_1=1\\(l_1,p)=1}}^{p^{t-\theta-1}}\sum_{l_2=1}^{p^{\theta+1}}e_{p^t}\left(h\left(l_1^k+p^{t-\theta-1}kl_1^{k-1}l_2\right)\right)=0,$$

так как $p\nmid l_1kp^{-\theta}$.

Лемма 8.4. Сравнение

$$x^k\equiv a\,(\operatorname{mod}p),\quad p\nmid a,$$

либо не имеет решений, либо имеет $(k,p-1)$ решений. Когда x пробегает значения $1,2,\dots,p-1\,(\operatorname{mod}p)$, x^k принимает $\frac{p-1}{(k,p-1)}$ различных по модулю p значений.

Доказательство. Сравнение $x^k\equiv 1\,(\operatorname{mod}p)$ имеет $(p-1,k)$ решений, так как $x^{p-1}\equiv 1\,(\operatorname{mod}p)$. Пусть

$$a_1,\dots,a_{(k,p-1)}$$

суть эти решения. Если $x_1^k\equiv a\,(\operatorname{mod}p)$, то

$$x_1a_1,\dots,x_1a_{(k,p-1)}$$

суть также решения сравнения $x^k\equiv a\,(\operatorname{mod}p)$ и наоборот. Итак, сравнение

$$x^k\equiv a\,(\operatorname{mod}p),\quad p\nmid a$$

либо не имеет решения, либо имеет $(k,p-1)$ решений. Мы получаем, таким образом, нашу лемму.

Лемма 8.5. При $(h,q)=1$ имеем

$$W_{h,q}\leqslant c_1(h,\varepsilon)\,q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Доказательство. 1) q взаимно просто с p. Тогда, в силу леммы 8.4,

$$\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{p}\left|\sum_{x=1}^{p}e_p(hx^k)\right|^2=\sum_{x^k\equiv y^k,(p)}\sum 1=(k,p-1)(p-1)+1.$$

Далее, рассмотрим суммы

$$\sum_{x=1}^{p}e_p(hx^k)=\sum_{x=1}^{p}e_p(h(\lambda x)^k)=\sum_{x=1}^{p}e_p(h\lambda^kx^k),\quad \lambda=1,\dots,p-1.$$

Так как λ^k принимает $\frac{p-1}{(k,p-1)}$ различных по модулю p, значений, то

$$\frac{p-1}{(k,p-1)}\left|\sum_{x=1}^{p}e_p(hx^k)\right|^2\leqslant\sum_{h=1}^{p}\left|\sum_{x=1}^{p}e_p(hx^k)\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant((h,p-1)(p-1)+1)p.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e_p(hx^k)\right| \leqslant \sqrt{\frac{k^2p^2}{p-1}} \leqslant 2k\sqrt{p},$$

т. е.

$$|W_{h,p}| \leqslant 2k\sqrt{p}$$

2) Имеем

$$W_{h,p^t} = O(1) \quad \text{при } p \mid k.$$

В силу леммы 8.3,

$$W_{h,p^t} = O(1) \quad \text{при } p \nmid k \text{ и } t > \gamma = \theta + 1 = 1.$$

Имеем, по пункту 1):

$$|W_{h,p}| \leqslant 2k\sqrt{p} \quad \text{для всех } p,$$

$$|W_{h,p}| \leqslant p^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \text{для всех } p \geqslant k^{1/\varepsilon}.$$

Пусть $q = p_1^{l_1} \ldots p_t^{l_t}$ и $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$, тогда, в силу леммы 8.1,

$$|W_{h,q}| = \prod_{p_i \leqslant k^{1/\varepsilon}} |W_{h_i, p^{l_i}}| \prod_{p_i > k^{1/\varepsilon}} |W_{h_i, p^{l_i}}| =$$

$$= O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

3. Леммы о сравнениях

Лемма 8.6. Пусть $M_s(p^t, N)$ — число решений сравнения

$$x_1^k + \ldots + x_s^k \equiv N \pmod{p^t}, \quad p \nmid x_1 \ldots x_s, \quad 0 < x_\nu < p^t.$$

Тогда

$$\varphi(p^t)^{-s} p^t M_s(p^t, N) = 1 + \sum_{d=1}^{t} B_s(N, p^d).$$

Доказательство. Имеем

$$M_s(p^t, N) = p^{-t} \sum_{\substack{l_1=1 \\ p \nmid l_1}}^{p^t} \cdots \sum_{\substack{l_s=1 \\ p \nmid l_s}}^{p^t} \sum_{h=1}^{p^t} e_{p^t}(h(l_1^k + \ldots + l_s^k - N)) =$$

$$= p^{-t} \sum_{h=1}^{p^t} W_{h,p^t}^s e_{p^t}(-hN) =$$

$$= p^{-t} \varphi^s(p^t)\left(1 + \sum_{d=1}^{t} B_s(N, p^d)\right).$$

Лемма 8.7 (I. Chowla и Davenport). Пусть $x_1, \ldots, x_m$ принадлежат m различным классам вычетов по модулю p^l, а $y_1, \ldots, y_n$ принадлежат n различным классам вычетов по модулю p^l и никакие два y не сравнимы друг с другом по модулю p. Тогда число различных классов вычетов, представляемых числами $x_i + y_j$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, больше или равно $\min(m+n-1,\ p^l)$.

Доказательство. Применим индукцию по n. Лемма очевидна при $n=1$, так как $x_i + y_1$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ принадлежат m различным классам вычетов.

Пусть $z_1, \ldots, z_t$ — представители всех различных классов вычетов по модулю p^l вида $x_i + y_j$. Без ограничения общности мы можем считать, что $t < p^l$. X, Y, Z будут означать, соответственно, множества $x_1, \ldots, x_m$; $y_1, \ldots, y_n$; $z_1, \ldots, z_t$.

Так как при $n \geqslant 2$ мы вправе предположить, что $p \nmid y$, то не все $z + y_1$ принадлежат Z, потому что иначе $z + \lambda y_1$ при всех λ принадлежало бы Z, и t равнялось бы p^l. Поэтому существует такое целое f, что $f - y$ принадлежит Z, а f не принадлежит Z. Занумеруем все y и z таким образом, чтобы иметь при некотором r $(1 \leqslant r \leqslant n)$

$$f \text{ не принадлежит } Z,$$

$$f - y_s = z_s \quad \text{при} \quad 1 \leqslant s \leqslant r,$$

$$f - y_{s'} \text{ не принадлежат } Z \text{ при } r < s' \leqslant n$$

(при $r = n$ последнего множества не существует).

При $1 \leqslant s \leqslant r < s' \leqslant n$ $z_s - y_{s'}$ не принадлежат X, так как в противном случае $f - y_{s'} \equiv f + x - z_s \equiv x + y_s$ принадлежала бы Z. При $1 \leqslant s \leqslant r$ z_s не принадлежит X, так как в противном случае, $f = x + y$ принадлежало бы Z.

Рассмотрим теперь множество Z', состоящее из различных классов вычетов вида $\equiv x_i + y_j$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ r < j \leqslant n)$. Z' есть подмножество множества Z. Так как $z_1, \ldots, z_r$ принадлежат Z, но не принадлежат Z', то $t' \leqslant t - r$.

По предположению индукции, $t' \geqslant m + (n - r)$ и поэтому

$$t \geqslant t' + r \geqslant m + n - 1.$$

Лемма 8.8. При $s \geqslant 3k+1$ и $(p-1) \nmid k$

$$M_s(p^\gamma, N) > 0.$$

Доказательство. Очевидно, что $p > 2$.

1) $p \nmid k$, $\gamma = 1$. Так как $(p-1) \nmid k$, то, согласно лемме 8.4, x^k принимает

$$d = \frac{p-1}{(k, p-1)} > 1$$

различных по модулю p значений, когда x пробегает $1, 2, \ldots, p-1 \pmod p$. По лемме 8.7, $x_1^k + \cdots + x_s^k$ $(p \nmid x_1 \ldots x_s)$ принимает

$$\min(d + (d-1)(s-1), p) = p$$

различных по модулю p значений, так как

$$s \geqslant 2k \geqslant \frac{p-1}{\frac{1}{2}d} \geqslant \frac{p-1}{d-1}.$$

Отсюда

$$d + (d-1)(s-1) = (d-1)s + 1 \geqslant p.$$

2) Пусть $k = p^\theta k_0$, $p \nmid k_0$. Тогда x^k принимает, по меньшей мере, $\frac{p-1}{(p-1, k_0)} (>1)$ различных значений, никакие два из которых не сравнимы по модулю p, так как

$$x^{p^\theta k_0} \equiv x^{k_0} \pmod p \text{ и } (p-1) \nmid k_0.$$

Следовательно, $x_1^k + \ldots + x_s^k$ принимает

$$\min\left(\frac{p-1}{(p-1, k_0)} + \left(\frac{p-1}{(p-1, k_0)} - 1\right)(s-2),\ p^\gamma\right) = p^\gamma$$

различных, по модулю p, значений, так как

$$s - 2 \geqslant 3k - 1 \geqslant \frac{2pk}{p-1} - 1 \geqslant \frac{p^\gamma}{\frac{1}{2}\frac{p-1}{(k_0, p-1)}} - 1 \geqslant \frac{p^\gamma - 1}{\frac{p-1}{(k_0, p-1)} - 1} - 1.$$

Лемма 8.9 Если $s \equiv N \pmod{p^\gamma}$, то

$$M_s(p^\gamma, N) > 0.$$

Доказательство очевидно.

4. Положительность особого ряда

Лемма 8.10. Особый ряд $\mathfrak{S}(N)$ абсолютно сходится при $s > 4$, а также при $s > 2$ и $k = 1$.

Доказательство. В силу леммы 8.5, имеем

$$|\mathfrak{S}(N)| \leqslant \sum_{q=1}^{\infty} |B_s(N, q)| \ll \sum_{q=1}^{\infty} q^{1 - \frac{1}{2}s + \varepsilon}.$$

Если $k = 1$, то $W_{h,q} = \mu(q)$ (функция Мебиуса). Так как $|\mu(q)| \leqslant 1$, то

$$|\mathfrak{S}(N)| \leqslant \sum_{q=1}^{\infty} |B_s(N, q)| \ll \sum_{q=1}^{\infty} q^{1-s}.$$

Лемма 8.11. При $s>4$ имеем

$$\mathfrak{S}(N)=\prod_{p}\chi_p(N),$$

где

$$\chi_p(N)=1+\sum_{t=1}^{\infty}B_s(N,p^t).$$

То же справедливо при $s>2$ и $k=1$.

Доказательство. Лемма получается непосредственно из лемм 8.1, 8.3 и 8.10.

Доказательство теоремы. В силу лемм 8.6, 8.8 и 8.9,

$$\chi_p(N)>0 \text{ для всех } p.$$

Имеем

$$|B_s(N,p)|\leqslant p\frac{(2k\sqrt{p})^s}{(p-1)^s}\leqslant(4k)^s p^{-\frac{1}{2}s+1}.$$

Поэтому при $p>(4k)^{4s}$

$$\chi_p>1-p^{-\frac{1}{2}s+1+\frac{1}{4}}.$$

Следовательно, для $s>4$

$$\mathfrak{S}(N)\geqslant\prod_{p\leqslant(4k)^{4s}}\chi_p\prod_{p>(4k)^{4s}}\left(1-p^{-\frac{5}{4}}\right)\geqslant A>0.$$

То же верно при $k=1$, $s>2$.

5. Следствия из теорем 11 и 12

Легко выводим следующую теорему.

Всякое достаточно большое целое число $N\equiv s\pmod K$ есть сумма s k-ых степеней простых чисел, если $s\geqslant s_0$, где

$$s_0\geqslant\begin{cases}2^k+1 & \text{при } 1\leqslant k\leqslant 14,\\ k^3(\log k+2\cdot 2\log\log k) & \text{при } k>14.\end{cases}$$

Чтобы сделать этот результат более конкретным, приведем следующие непосредственные следствия:

Следствие 1. Всякое большое нечетное целое число есть сумма трех простых.

Следствие 2. Всякое большое целое число $\equiv 5\pmod{24}$ есть сумма пяти квадратов простых чисел.

Следствие 3. Всякое большое нечетное целое число есть сумма девяти кубов простых чисел.

Следствие 4. Всякое большое целое число $\equiv 17 \pmod{240}$ есть сумма семнадцати четвертых степеней простых чисел.

В заключение главы введем следующее обозначение. Пусть $H(k)$ обозначает наименьшее целое число такое, что всякое достаточно большое целое число $N \equiv s \pmod{K}$ есть сумма s k-ых степеней простых чисел. Тогда полученный выше результат может быть сформулирован так:

$$H(k) \leqslant \begin{cases} 2^k + 1 & \text{при } k \leqslant 14, \\ k^3 (\log k + 2 \cdot 2 \log \log k) & \text{при } \kappa > 14. \end{cases}$$

ГЛАВА IX

Дальнейшее рассмотрение проблемы Варинга-Гольдбаха

1.

Цель этой главы — улучшить результат п. 5 главы VIII. Именно:

$$\text{пусть } k \text{ — целое число} \geqslant 4,\ a = \frac{1}{k},$$

$$b = \begin{cases} k^3 (\log k + 1.1 \log\log k^2) & \text{при } k \geqslant 14, \\ 2^{k-1} & \text{при } k < 14 \end{cases}$$

и

$$m = \left[\frac{\log \frac{1}{2} b + \log(1 - 2a)}{-\log(1 - a)} \right].$$

Теорема 13. Всякое достаточно большое (т. е. $\geqslant c(k)$) целое число $N \equiv s \pmod k$ есть сумма s k-ых степеней простых чисел, если $s \geqslant s_0$, где $s_0 = s_0(k) = 2k + 2m + 7$. Иначе,

$$H(k) \leqslant 2k + 2m + 7.$$

Для больших k

$$m \sim 3k \log k$$

и

$$s_0 \sim 6k \log k.$$

Этот результат для $k \geqslant 5$ лучше результата, полученного в п. 5 предыдущей главы. В дальнейшей части этой главы мы еще улучшим этот результат для $k = 4$, 5, 6 и 7, именно, мы покажем, что

$$H(4) \leqslant 15,\quad H(5) \leqslant 25,\quad H(6) \leqslant 39,\quad H(7) \leqslant 55.$$

2. Лемма, относящаяся к проблеме Варинга

Пусть N — большое число и $P = \frac{1}{2} N^a$.

$$T(\alpha, P) = \sum_{P \leqslant n \leqslant 2P} e(n^k \alpha),$$

$$T_i(\alpha) = T(\alpha, 2^{-i} P^{(1-a)^i}), \quad i = 0, \ldots, m+1,$$

$$Q(\alpha) = T_1(\alpha) \cdots T_m(\alpha)\, T_{m+1}^2(\alpha) =$$

$$= \sum_n r_{m+2}(n)\, e(n\alpha),$$

$$R_\alpha = T_0(\alpha)\, Q(\alpha) =$$

$$= \sum_n r_{m+3}(n)\, e(n\alpha),$$

$$T_0^k(\alpha)\, R(\alpha) = \sum_n r_{m+k+3}(n)\, e(n\alpha).$$

Тогда имеем, очевидно,

$$c_1 P^{k-1-(k-2)(1-a)^{m+1}} \leqslant Q(0) \leqslant c_2 P^{k-1-(k-2)(1-a)^{m+1}}.$$

Основная лемма этого пункта:

$$\sum_n r_{m+k+3}^2(n) = \int_0^1 |\, T_0^k(\alpha)\, R(\alpha)\,|^2\, d\alpha = O(P^{k+2}\, Q^2(0)).$$

Лемма 9.1. Имеем

$$\sum_n r_{m+3}^2(n) = \int_0^1 |R(\alpha)|^2\, d\alpha = O(PQ(0)\, L^{c_3}).$$

Доказательство. $\sum_n r_{m+3}^2(n)$ есть число решений уравнения

$$x_0^k + \cdots + x_m^k + x_{m+1}'^k = y_0^k + \cdots + y_m^k + y_{m+1}^k + y_{m+1}'^k, \tag{1}$$

где

$$2^{-i} P^{(1-a)^i} \leqslant x_i, \quad y_i \leqslant 2^{1-i} P^{(1-a)^i}.$$

Из (1) следует, что $x_i = y_i$ для $i = 0, 1, \ldots, m$, когда P достаточно велико, потому что, если v первый из тех индексов, для которых $x_v \neq y_v$, то

$$|x_v^k - y_v^k| \geqslant k(P^{(1-a)^v} 2^{-v})^{k-1}.$$

Правая часть последнего неравенства больше, чем

$$y_{v+1}^k + \cdots + y_{m+1}^k + y_{m+1}'^k,$$

когда P достаточно велико. По теореме 4, число решений уравнения

$$x_{m+1}^k + x_{m+1}'^k = y_{m+1}^k + y_{m+1}'^k$$

есть $O(P^{2(1-a)^{m+1}} L^{c_3})$. Лемма доказана.

Разбиваем интервал $-\frac{1}{\tau} \leqslant \alpha \leqslant 1-\frac{1}{\tau}$ так же, как это делалось в п. 3 главы VII; $\mathfrak{M}(h, q)$ и E пусть означают то же, что и в п. 3 главы VII.

Лемма 9.2

$$\int_E |T_0^k(\alpha) R(\alpha)|^2 d\alpha = O(P^{k+2} Q^2(0)).$$

Доказательство. Так как, по теореме 9,

$$T_0(\alpha) = O\left(P^{1-\frac{1}{b}+\varepsilon}\right),$$

то

$$\int_E |T_0^{2k}(\alpha) R^2(\alpha)| d\alpha \ll P^{2k\left(1-\frac{1}{b}\right)+\varepsilon} \int_0^1 |R^2(\alpha)| d\alpha \ll$$

$$\ll P^{1+2k(1-1/b)+\varepsilon} Q(0) \ll$$

$$\ll P^{2k(1-1/b)+2-k+(k-2)(1-a)^{m+1}+\varepsilon} Q^2(0) \ll$$

$$\ll P^{k+2} Q^2(0),$$

потому что $(k-r)(1-a)^{m+1} < \frac{2k}{b}$.

Лемма 9.3.

$$\sum_{\mathfrak{M}(h,q)} \int_{\mathfrak{M}(h,q)} |T_0^k(\alpha) R(\alpha)|^2 d\alpha = O(P^{k+2} Q^2(0)).$$

Доказательство. В силу леммы 7.12, имеем

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |T_0^k(\alpha) R(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |T_0^{2k+2}(\alpha)| |Q^2(\alpha)| d\alpha \ll$$

$$\ll Q^2(0) \sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |T_0(\alpha)|^{2k+2} d\alpha \ll$$

$$\ll P^{k+2} Q^2(0).$$

Лемма 9.4.

$$\sum_n r_{k+m+3}^2(n) \ll P^{k+2} Q^2(0).$$

Доказательство. Леммы 9.2 и 9.3.

3. Доказательство теоремы 13

Пусть

$$\mathfrak{T}(\alpha, P) = \sum_{P < p \leqslant 2P} e(p^k \alpha), \quad \mathfrak{T}_0^*(\alpha, h, q) = \frac{W_{hq}}{\varphi(q)} \sum_{P^k < n \leqslant (2P)^k} \frac{e(n\beta)}{n^{1-a} \log n}.$$

Соответствующим образом определяем $\mathfrak{T}_i(\alpha)$, $i=0, 1, \ldots, m, m+1$, $\mathfrak{Q}(\alpha)$ и $R(\alpha)$.

Пусть

$$\mathfrak{T}_0^{k+1}(\alpha)\,\mathfrak{Q}(\alpha)=\sum_n r'_{m+k+3}(n)\,e(n\alpha)$$

и

$$\mathfrak{T}^{2k+3}(\alpha)\,\mathfrak{Q}^2(\alpha)=\sum_n r'_{2m+2k+7}(n)\,e(n\alpha),$$

так что $r'_{2m+2k+7}(n)$ есть число решений уравнения

$$n=p_1^k+\cdots+p_{2m+2k+7}^k,$$

где p удовлетворяют определенным условиям. Разбиваем интервал $-\frac{1}{\tau}\leqslant\alpha\leqslant 1-\frac{1}{\tau}$ так же, как в п. 7 главы VII.

Лемма 9.5.

$$\sum_{\mathfrak{M}}\int_{\mathfrak{M}}|\mathfrak{T}_0^{2k+3}(\alpha)-\mathfrak{T}_0^{*2k+3}(\alpha, h, q)|\,\mathfrak{Q}(\alpha)\,d\alpha\ll P^{k+3}\,Q^2(0)\,e^{-c_4\sqrt{L}}.$$

Доказательство. В силу 7.15 и 7.16, имеем на $\mathfrak{M}(h, q)$

$$\mathfrak{T}_1^{2k+3}(\alpha)-\mathfrak{T}_0^{*2k+3}(\alpha, h, q)\ll(q^{-a+\varepsilon})^{2k+2}\min(P, |\beta|^{-a})^{2k+2}\,Pe^{-c_5\sqrt{L}}.$$

Поэтому рассматриваемая нами сумма не превосходит

$$\ll P^{k+3}\,Q^2(0)\,e^{-c_4\sqrt{L}}.$$

Лемма 9.6.

$$\sum_{\mathfrak{M}}\int_{\mathfrak{M}}|\mathfrak{T}_0^{*2k+3}(\alpha, h, q)|\left|\mathfrak{Q}^2(0)-\Lambda^2\left(\frac{W_{hq}}{\varphi(q)}\right)^{2m+4}\right|d\alpha\ll P^{k+3}\,Q^2(0)\,e^{-c_6\sqrt{L}},$$

где

$$c_7\frac{Q(0)}{L^{m+2}}\leqslant\Lambda\leqslant c_8\frac{Q(0)}{L^{m+2}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\left|\mathfrak{Q}(\alpha)-\mathfrak{Q}\left(\frac{h}{q}\right)\right|\leqslant\sum_n r'_{m+2}(n)\,|e(n\alpha)-e(nh/q)|\ll$$

$$\ll|\beta|\sum_n nr'_{m+2}(n)\ll P^{k-1}|\beta|\,Q(0)\ll$$

$$\ll P^{-1}L^{\sigma}\,Q(0).$$

Далее, по теореме Siegel-Walfisz'а

$$\mathfrak{T}\left(\frac{h}{q}\right)=\sum_{2^{-i}P^{(1-a)^i}\leqslant p\leqslant 2^{-i+1}P^{(1-a)^i}} e_q(hp^k)=$$

$$=\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e_q(hl^k)\left(\pi\left(2^{-i}P^{(1-a)^i};\ l,\ q\right)-\pi\left(2^{-i+1}P^{(1-a)^i};\ l,\ q\right)\right)+O(q^2)=$$

$$=\frac{W_{hq}}{\varphi(q)}\int\limits_{2^{-i}P^{(1-a)^i}}^{2^{-i+1}P^{(1-a)^i}}\frac{dx}{\log x}+O\left(P^{(1-a)^i}e^{-c_9\sqrt{L}}\right).$$

Поэтому

$$\mathfrak{Q}\left(\frac{h}{q}\right)=\left(\frac{W_{hq}}{\varphi(q)}\right)^{m+2}\Lambda+O\left(Q(0)\,e^{-c_{10}\sqrt{L}}\right),$$

где

$$\Lambda=\left(\prod_{i=1}^{m+1}\int\limits_{2^{-i}P^{(1-a)^i}}^{2^{-i+1}P^{(1-a)^i}}\frac{dx}{\log x}\right)\left(\int\limits_{2^{-(m+1)}P^{(1-a)^{m+1}}}^{2^{-m}P^{(1-a)^{m+1}}}\frac{dx}{\log x}\right).$$

Λ удовлетворяет, очевидно, неравенству в нашей лемме, так как

$$\frac{x}{\log x}\ll\int\limits_{2}^{x}\frac{dx}{\log x}\ll\frac{x}{\log x}.$$

Следовательно,

$$\left|\mathfrak{Q}^2(\alpha)-\Lambda^2\left(\frac{W_{hq}}{\varphi(q)}\right)^{2(m+2)}\right|\ll\left|\mathfrak{Q}(\alpha)-\Lambda\left(\frac{W_{hq}}{\varphi(q)}\right)^{m+2}\right|Q(0)\ll$$

$$\ll Q^2(0)\,e^{-c_{10}\sqrt{L}}.$$

В силу леммы 7.16, рассматриваемая сумма не превосходит

$$\ll\sum_{q\leqslant L^\sigma}q\cdot Q^2(0)\,e^{-c_{10}\sqrt{L}}q^{-2-3a+\varepsilon}\left(\int\limits_0^{P^{-k}}P^{2k+3}\,d\beta+\int\limits_{P^{-k}}\beta^{-2-3a}\,d\beta\right)\ll$$

$$\ll P^{k+3}\,Q^2(0)\,e^{-c_{6}\sqrt{L}}.$$

Лемма 9.7.

$$\sum_{\mathfrak{M}}\left(\int\limits_0^1-\int\limits_{\mathfrak{M}}\right)\left|\mathfrak{T}_0^{*2k+3}(\alpha,\ h,\ q)\,\Lambda^2\left(\frac{W_{hq}}{\varphi(q)}\right)^{2m+4}\right|d\alpha\ll P^{k+3}\,Q^2(0)\,L^{-s_1}.$$

Доказательство. Левая часть не превосходит

$$\ll\sum_{q\leqslant L^\sigma}q\cdot Q^2(0)\,q^{-(2m+4)a}\,q^{-(2+3a)+\varepsilon}\int\limits_{q^{-1}N^{-1}L^\sigma}\beta^{-2-3a}\,d\beta\ll$$

$$\ll P^{k+3}\,Q^2(0)\,L^{-\sigma(1+3a)}\ll P^{k+3}\,Q^2(0)\,L^{-s_1},$$

так как $s_1<\sigma$.

Лемма 9.8.

$$\int\limits_{E} \left| \mathfrak{T}^{2k+3}(\alpha)\mathfrak{Q}^2(\alpha)\right|^2 d\alpha \ll P^{k+3} Q^2(0) L^{-s_1}.$$

Доказательство. В силу теоремы 10 и леммы 9.4, имеем

$$\int\limits_{E} \left| \mathfrak{T}^{2k+3}(\alpha)\mathfrak{Q}^2(\alpha)\right| d\alpha \ll PL^{-s_1} \int\limits_0^1 \left| T^{2k+2}(\alpha)\, Q^2(0)\right| d\alpha \ll$$

$$\ll P^{k+3} Q^2(0) L^{-s_1}.$$

Лемма 9.9.

$$r'_{2k+2m+7}(N) = \Lambda^2 \mathfrak{S}(N)\Psi(N) + O\left(P^{k+3} Q^2(0) L^{-s_1}\right),$$

где Λ определена в лемме 9.6 и

$$c_{11} P^{k+3} L^{-2k-3} < \Psi(N) < c_{12} P^{k+3} L^{-2k-3}.$$

Доказательство. В силу лемм 9.5, 9.6, 9.7 и 9.8,

$$r'_{2k+2m+7}(N) = \int\limits_0^1 \mathfrak{T}_0^{2k+3}(\alpha)\, \mathfrak{Q}^2(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \sum_{q \leqslant L^\sigma} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{q} \Lambda^2 \left(\frac{W_{hq}}{\varphi(q)}\right)^{2k+2m+7} e_q(-Nh)\,\Psi(N) +$$

$$+ O\left(P^{k+3} L^{-s_1} Q^2(0)\right),$$

где

$$\Psi(N) = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_{2k+3}=N \\ P^k \leqslant n \leqslant (2P)^k}} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2k+3} n_i^{1-a} \log n_i}.$$

В силу леммы 7.19, $\Psi(N)$ удовлетворяет неравенству в нашей лемме. Лемма следует отсюда, так как

$$\sum_{q > L^\sigma} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{q} \left(\frac{W_{hq}}{\varphi(q)}\right)^{2k+3m+7} e_q(-Nh) \ll L^{-s_1}$$

(как в главе VII).

Теорема 13 вытекает из леммы 9.9 и из теоремы 12.

4. Лемма Девенпорта (Devenport)

Для небольших K предыдущие результаты могут быть еще улучшены. Ниже автор покажет, что

$$H(4) \leqslant 15, \quad H(5) \leqslant 25, \quad H(6) \leqslant 37, \quad H(7) \leqslant 55, \quad H(8) \leqslant 75.$$

В доказательстве этих результатов важную роль будет играть лемма, в существенном принадлежащая Девенпорту.

Лемма 9.10 (Devenport).[1] Пусть $\{M\}$ — некоторое множество натуральных чисел (не обязательно различных), удовлетворяющее следующим условиям:

a) в $\{M\}$ существуют $\mathfrak{M}$ пар одинаковых элементов, т. е. число решений уравнения $M_1 = M_2$ $(M_1 \in \{M\},\ M_2 \in \{M\})$ равно $\mathfrak{M}$;

b) число элементов $\{M\}$ есть $\mathfrak{N}$

и

c) в $\{M\}$ всякий элемент $\ll P^{\delta}$.

Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми значениями степени k. Тогда число решений уравнения

$$f(x_1) + M_1 = f(x_2) + M_2, \quad p \leqslant x_1,\ x_2 \leqslant 2P, \quad M_1,\quad M_2 \in \{M\} \tag{1}$$

при $1 \leqslant r \leqslant k-2$ будет

$$\ll P^{1+\varepsilon}\, \mathfrak{M}\left(1 + P^{\delta-k+1-2^{-r+1}} + P^{(1-2^{-r})(\delta-k+1)-(r+1)2^{-r}}\, \mathfrak{M}^{-2^{-r}}\, \mathfrak{N}^{2^{1-r}}\right),$$

где постоянное, подразумевающееся в $\ll$ зависит только от k и ε.

Доказательство. Мы пользуемся обозначением

$$t_1 \Delta f(x) = f(x + t_1) - f(x)$$

и

$$t_1 \cdots t_r \Delta^r f(x) = t_r \Delta\left(t_1 \cdots t_{r-1} \Delta^{r-1} f(x)\right).$$

1) Пусть $N_r\ (r \geqslant 1)$ означает число решений уравнения

$$t_1 \cdots t_r \Delta^r f(x) + M_1 = M$$

$$P \leqslant x \leqslant 2P,\ t_1 \cdots t_r \ll P^{\delta-k+r},\ t_i > 0, \tag{2}$$

а $r(M, t)$ — число решений (2) при фиксированных $t_1, \ldots, t_r$ и M. Имеем тогда

$$N_r \ll \mathfrak{M} P^{\delta-k+r} + \left(\mathfrak{M} P^{\delta-k+r} N_{r+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

В самом деле, согласно неравенству Коши,

$$N_r = \sum_t \sum_M r(M, t) \leqslant \left(\sum_t \sum_M 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_t \sum_M r^2(M, t)\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(P^{\delta-k+r}\, \mathfrak{M} \sum_t \sum_M r^2(M, t)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

[1] Ценным замечанием автор обязан д-ру Rao.

$\sum_t \sum_M r^2(M, t)$ — число решений уравнения

$$t_1 \cdots t_r \Delta^r f(x_1) + M_1 = t_1 \cdots t_r \Delta^r f(x_2) + M_2, \tag{4}$$

подчиненного условию, что обе его части принадлежат $\{M\}$. Число $t_1 \cdots t_r \Delta^r f(x_2) + M$, принадлежащих $\{M\}$, есть, очевидно, N_r; таким образом, число решений уравнения (4) с $x_1 = x_2$ есть N_r. Предположим теперь, что $x_1 > x_2$. Пусть $x_1 = x + x_{r+1}$, $x = x_2$; тогда

$$t_1 \cdots t_{r+1} \Delta^{r+1} f(x) + M_1 = M_2. \tag{5}$$

Так как

$$\Delta^{r+1} f(x) \gg x^{k-r-1} \gg P^{k-r-1},$$

то

$$t_1 \cdots t_{r+1} \ll P^{\delta-k+r+1}.$$

Итак, число решений уравнения (4) с $x_1 > x_2$ будет $\ll N_r$. Поэтому

$$N_r \ll \{P^{\delta-k+r} \mathfrak{M} (N_r + N_{r+1})\}^{\frac{1}{2}},$$

т. е.

$$N_r \ll P^{\delta-k+r} \mathfrak{M} + (P^{\delta-k+r} \mathfrak{M} N_{r+1})^{\frac{1}{2}}.$$

2) При $1 \leqslant r \leqslant k-2$ имеем

$$N_1 \ll \mathfrak{M} P^{\delta-k+2-2^{-r+1}} + \mathfrak{M}^{1-2^{-r}} P^{(\delta-k+1)(1-2^{-r})+1-(r+1)2^{-r}} N_{r+1}^{2^{-r}}. \tag{6}$$

Действительно, для $r=1$ (6) сводится к (3). Предположим, что (6) верно для $r-1$. В силу (3), получаем

$$\begin{aligned}
N_1 &\ll \mathfrak{M} P^{\delta-k+2-2^{-r+2}} + \mathfrak{M}^{1-2^{-r+1}} P^{(\delta-k+1)(1-2^{-r+1})+1-r\cdot 2^{-r+1}} N_r^{2^{-r+1}} \\
&\ll \mathfrak{M} P^{\delta-k+2-2^{-r+2}} + \mathfrak{M}^{1-2^{-r+1}} P^{(\delta-k+1)(1-2^{-r+1})+1-r\cdot 2^{-r+1}} \Big(\mathfrak{M} P^{\delta-k+r} + \\
&\qquad + (P^{\delta-k+r} \mathfrak{M} N_{r+1})^{\frac{1}{2}}\Big)^{2^{-r+1}} \\
&\ll \mathfrak{M} P^{\delta-k+2-2^{-r+1}} + \mathfrak{M}^{1-2^{-r}} P^{(\delta-k+1)(1-2^{-r})+1-(r+1)\cdot 2^{-r}} N_{r+1}^{2^{-r}}.
\end{aligned}$$

3) Пусть N — число решений уравнения (1); тогда

$$N \ll P\mathfrak{M} + N_1.$$

В самом деле, уравнение (1) с $x_1 = x_2$ имеет решений $\ll P\mathfrak{M}$, а при $x_1 \neq x_2$ число решений $\ll N_1$.

Лемма вытекает из (6) и из тривиального соотношения

$$N_{r+1} \ll \sum_{M_1} \sum_{M_2} d^r (M_2 - M_1) \ll \mathfrak{M}^2 P^{\varepsilon}.$$

Замечание. В дальнейшем мы будем рассматривать такое множество $\{M\}$, для которого $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N} P^3$, так что утверждение леммы 9.10 примет вид

$$P^{1+\varepsilon}\mathfrak{N}\left(1+P^{\delta-k+1-2^{r+1}}+P^{(1-2^{-r})(\delta-k+1)-(r+1)\,2^{-r}}\,\mathfrak{N}^{2^{-r}}\right). \tag{7}$$

Лемма 9.11. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми значениями четвертой степени. Тогда уравнение

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f'(x_4)=f(y_1)+f(y_2)+f(y_3)+f(y_4)+f(y_4')$$

$$P \leqslant x_1, y_1 \leqslant 2P, P^{\frac{132}{167}} \leqslant x_2, y_2 \leqslant 2P^{\frac{132}{167}}, \quad P^{\frac{108}{167}} \leqslant x_3, y_3 \leqslant 2P^{\frac{108}{167}},$$

$$P^{\frac{40}{167}} \leqslant x_4, y_4, x_4', y_4' \leqslant 2P^{\frac{90}{167}}$$

имеет $\ll P^{\frac{7}{2}+\frac{5}{334}+\varepsilon}$ решений.

Доказательство. 1) Пусть $\{M\}$ — множество целых чисел вида

$$f(z_1)+f(z_1'), \quad P^{\frac{5}{6}} \leqslant z_1, \quad z_1' \leqslant 2P^{\frac{5}{6}}.$$

Тогда, по теореме 4, $\mathfrak{N}=P^{\frac{5}{3}}$, $\mathfrak{M} \ll P^{\frac{5}{3}+\varepsilon}$ и $\delta=\frac{10}{3}$. Если мы возьмем $r=1$, то в силу (7), число решений уравнения

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_2')=f(y_1)+f(y_2)+f(y_2'),$$

$$P \leqslant x_1, y_1 \leqslant 2P, \quad P^{\frac{5}{6}} \leqslant x_2, y_2, x_2', y_2' \leqslant 2P^{\frac{5}{6}}$$

будет $\ll P^{1+\frac{5}{3}+\varepsilon} \cdot P^{\frac{8}{3}+\varepsilon}$, так как

$$\delta-k+1-2^{-r+1}=\frac{10}{3}-4+1-1=\frac{10}{3}-4>0$$

и

$$\left(1-\frac{1}{2^r}\right)(\delta-k+1)-(r+1)\,2^{-r}+2^{-r}\,\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}-4+1\right)-1+\frac{5}{6}=0.$$

2) Пусть $\{M\}$ — множество целых чисел вида

$$f(z_1)+f(z_2)+f(z_2'), \quad P^{\frac{9}{11}} \leqslant z_1 \leqslant 2P^{\frac{9}{11}}, \quad P^{\frac{9}{11}\cdot\frac{5}{6}} \leqslant z_2, z_2' \leqslant 2P^{\frac{9}{11}\cdot\frac{5}{6}}.$$

В силу 1), имеем $\mathfrak{M} \ll P^{\frac{9}{11}+2\frac{9}{11}\cdot\frac{5}{16}+\varepsilon} = P^{\frac{24}{11}+\varepsilon} = \mathfrak{N}P^{\varepsilon}$ и $\delta = \frac{36}{11}$.

Если взять $r=2$, то в силу (7), число решений уравнения

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_3')=f(y_1)+f(y_2)+f(y_3)+f(y_3')$$

$$P \leqslant x_1,\ y_1 \leqslant 2P,\ P^{\frac{9}{11}} \leqslant x_2,\ y_2 \leqslant 2P^{\frac{9}{11}}$$

$$P^{\frac{9}{11}\cdot\frac{5}{6}} \leqslant x_3,\ y_3,\ x_3',\ y_3' \leqslant 2P^{\frac{9}{11}\cdot\frac{5}{6}}$$

будет $\ll P^{1+\varepsilon}\mathfrak{M} \ll P^{1+\frac{24}{11}+\varepsilon} = P^{3+\frac{2}{11}+\varepsilon}$, так как

$$\delta - k + 1 - 2^{-r+1} = \frac{36}{11} - 4 + 1 - \frac{1}{2} < 0$$

$$\left(1-\frac{1}{2^r}\right)(\delta - k + 1) - (r+1)2^{-r} + 2^{-r}\frac{24}{11} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{36}{11} - 3\right) - 3\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{24}{11} = 0.$$

3) Пусть $\{M\}$ — множество целых чисел вида:

$$f(z_1)+f(z_2)+f(z_3)+f(z_3'),$$

$$P^{\frac{132}{167}} \leqslant z_1 \leqslant 2P^{\frac{132}{167}},\ P^{\frac{132}{167}\cdot\frac{9}{11}} \leqslant z_2 \leqslant 2P^{\frac{132}{117}\cdot\frac{9}{11}},$$

$$P^{\frac{132}{167}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{5}{6}} \leqslant z_3,\ \ z_3' \leqslant 2P^{\frac{132}{167}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{5}{6}}.$$

В силу 2), имеем

$$\mathfrak{M} \ll P^{\frac{132}{167}\left(3+\frac{2}{11}\right)+\varepsilon} = P^{\frac{420}{167}+\varepsilon} = \mathfrak{N}P^{\varepsilon}$$

и $\delta = \frac{4\cdot 132}{167}$. Взяв $r=2$, получим утверждение нашей леммы, так как

$$1+\frac{420}{167} = \frac{587}{167} = \frac{7}{2} + \frac{5}{334},$$

$$\delta - k + 1 - 2^{-r+1} = \frac{4\cdot 87}{110} - 3 - \frac{1}{2} < 0$$

и

$$\left(1-\frac{1}{2^r}\right)(\delta - k + 1) - (r+1)2^{-r} + 2^{-r}\frac{420}{167} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{4\cdot 132}{167} - 4 + 1\right) - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{420}{167} = 0.$$

Для ясности мы заключим доказательство в таблицу.

Число значений $f(x)$	r	λ	Показатель при P в $\mathfrak{M}P$
3	1	$\frac{5}{6}$	$1+2\cdot\frac{5}{6}+\varepsilon=\frac{8}{3}+\varepsilon$
4	2	$\frac{9}{11}$	$1+\frac{9}{11}\cdot\frac{8}{3}+\varepsilon=3+\frac{2}{11}+\varepsilon$
5	2	$\frac{132}{167}$	$1+\frac{132}{167}\left(3+\frac{2}{\pi}\right)+\varepsilon=\frac{7}{2}+\frac{5}{334}+\varepsilon$

Лемма 9.12. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми значениями пятой степени. Пусть N — число решений уравнения

$$f(x_1)+\cdots+f(x_7)+f(x_7')=f(y_1)+\cdots+f(y_7)+f(y_7'),$$

$$P\leqslant x_1, y_1\leqslant 2P,$$

$$P^{\lambda_1}\leqslant x_2, y_2\leqslant 2P^{\lambda_1},\qquad \lambda_1=\frac{2\,334\,984}{2\,873\,111},$$

$$P^{\lambda_1\lambda_2}\leqslant x_3, y_3\leqslant 2P^{\lambda_1\lambda_2},\qquad \lambda_2=\frac{238\,712}{291\,873},$$

$$P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\leqslant x_4, y_4\leqslant 2P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3},\qquad \lambda_3=\frac{24\,616}{29\,839},$$

$$P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}}\leqslant x_5, y_5\leqslant 2P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}},$$

$$P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}\cdot\frac{272}{321}}\leqslant x_6, y_6\leqslant 2P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}\cdot\frac{272}{321}},$$

$$P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}\cdot\frac{272}{321}\cdot\frac{15}{17}}\leqslant x_7,\ y_7,\ x_7',\ y_7'\leqslant 2P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}\cdot\frac{272}{321}\cdot\frac{15}{17}}.$$

Тогда

$$N=O\left(P^{\frac{9}{2}+\rho+\varepsilon}\right),\qquad \rho=\frac{318\,447}{5\,746\,222}.$$

Лемма доказывается следующей таблицей:

Число значений $f(x)$	r	λ	Показатель при P в $\mathfrak{M}P$
3	2	$\frac{15}{17}$	$\frac{47}{17}+\varepsilon$
8	3	—	$\frac{9}{2}+\rho+\varepsilon$

Примечание. Значение $\frac{9}{2}+\rho$ получается пятикратным повторением рекуррентной формулы

$$\sigma'=1+\frac{32\sigma}{35+\sigma}$$

при начальном значении $\sigma = \frac{47}{17}$; вычисления легко провести, пользуясь тем, что предыдущая формула эквивалентна следующей:

$$\frac{\sigma' + 7}{\sigma' - 5} = \frac{10}{7} \frac{\sigma + 7}{\sigma - 5}.$$

Лемма 9.13. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми значениями шестой степени. Тогда существуют $\mu_1, \ldots \mu_{13}$ такие что уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{13} f(x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{13} f(y_\nu), \quad P^{\mu_\nu} \leqslant x_\nu, y_\nu \leqslant 2P^{\mu_\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant 13$$

имеет $\ll P^{\mu_1 + \cdots + \mu_{13} + \varepsilon}$ решений, причем $\mu_1 + \ldots + \mu_{13} > 5.689$.

Лемма доказывается следующей таблицей:

Число значений $f(x)$	r	λ	Показатель при P в $\mathfrak{M}P$
3	2	$\frac{9}{10}$	$\frac{14}{5} + \varepsilon$
4	3	$\frac{195}{224}$	$\frac{55}{16} + \varepsilon$
5	3	$\frac{624}{727}$	$\frac{2872}{727} + \varepsilon$
13	4	—	5.689

Примечание. Число 5.689 получается восьмикратным применением рекуррентной формулы

$$\sigma' = 1 + \frac{80\sigma}{90 + \sigma} \left(\text{т. е. } \frac{\sigma' + 15}{\sigma' - 6} = \frac{32}{25} \frac{\sigma + 15}{\sigma - 6}\right)$$

при начальном значении $\frac{2872}{727}$.

Лемма 9.14. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми значениями седьмой степени. Тогда существуют $\mu_1, \ldots, \mu_{13}$ такие, что уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{19} f(x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{19} f(y_\nu), \quad P^{\mu_\nu} \leqslant x_\nu, y_\nu \leqslant 2P^{\mu_\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant 19$$

имеет $\ll P^{\mu_1 + \cdots + \mu_{19} + \varepsilon}$ решений, причем $\mu_1 + \cdots + \mu_{19} > 6.767$.

Лемма доказывается таблицей (см. верхнюю таблицу на стр. 124).

Лемма 9.15. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми значениями восьмой степени. Тогда существуют $\mu_1, \ldots, \mu_{29}$ такие, что уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{29} f(x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{29} f(y_\nu), \quad P^{\mu_\nu} \leqslant x_\nu, y_\nu \leqslant 2P^{\mu_\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant 29,$$

Число значений $f(x)$	r	λ	Показатель при P в $\mathfrak{M}P$
3	2	$\frac{21}{23}$	$\frac{65}{23}+\varepsilon$
4	3	$\frac{529}{596}$	$\frac{2091}{596}+\varepsilon$
5	3	$\frac{27\,416}{31\,295}$	$\frac{127\,481}{31\,295}+\varepsilon$
6	4	$\frac{3\,973\,025}{3\,413\,456}$	$\frac{15\,524\,151}{3\,413\,456}+\varepsilon$
7	4	$\frac{324\,278\,320}{373\,937\,071}$	$\frac{1\,848\,731\,376}{373\,937\,031}+\varepsilon$
19	5	—	6.767

Примечание. Число 6.767 получается двенадцатикратным применением рекуррентной формулы

$$\sigma' = 1 + \frac{192\sigma}{217+\sigma}\left(\text{т. е.}\quad \frac{\sigma'+31}{\sigma'-7} = \frac{112}{93}\,\frac{\sigma+31}{\sigma-7}\right)$$

при начальном значении $\frac{1\,848\,731\,376}{373\,937\,031}$.

имеет $\ll P^{\mu_1+\dots+\mu_{29}+\varepsilon}$ решений, причем $\mu_1+\dots+\mu_{29} > 7.8887$.

Лемма доказывается следующей таблицей.

Число значений $f(x)$	r	λ	Показатель при P в $\mathfrak{M}P$
3	2	$\frac{12}{13}$	$\frac{37}{13}+\varepsilon$
4	3	$\frac{689}{765}$	$\frac{2726}{765}+\varepsilon$
5	4	$\frac{42\,075}{47\,263}$	$\frac{197\,193}{47\,263}+\varepsilon$
6	4	$\frac{5\,198\,930}{5\,868\,753}$	$\frac{27\,559\,983}{5\,868\,753}+\varepsilon$
7	5	$\frac{1\,308\,731\,914}{1\,433\,010\,727}$	$\frac{7\,618\,886\,936}{1\,483\,010\,727}+\varepsilon$
8	5	$\frac{330\,711\,392\,121}{375\,405\,547\,232}$	$\frac{259\,302\,166\,745}{46\,925\,693\,404}+\varepsilon$
9	5	$\frac{10\,464\,489\,629\,092}{11\,896\,378\,130\,937}$	$\frac{69\,720\,761\,315\,192}{11\,896\,378\,130\,437}+\varepsilon$
29	6	—	7.8887

Примечание. Число 7.8887 получается двадцатикратным применением рекуррентной формулы

$$\sigma' = 1 + \frac{448\sigma}{504+\sigma} \left(\text{т. е.}\ \ \frac{\sigma'+63}{\sigma'-8} = \frac{512}{441}\,\frac{\sigma+63}{\sigma-8}\right)$$

при начальном значении $\dfrac{69\,720\,761\,315\,192}{11\,896\,378\,130\,987}$.

Замечание. Для $k > 8$ соответствует другой метод, которым можно получить еще более точные результаты. Поэтому я ограничиваюсь вычислениями до $k = 8$.

5. Доказательство неравенства $H(4) \leqslant 15$

Пусть

$$T_0(\alpha) = T(\alpha,\ P) = \sum_{P<n\leqslant 2P} e(n^4\alpha),$$

$$T'(\alpha) = T\left(\alpha,\ P^{\frac{132}{167}}\right),$$

$$T''(\alpha) = T\left(\alpha,\ P^{\frac{108}{167}}\right),$$

$$T'''(\alpha) = T\left(\alpha,\ P^{\frac{90}{167}}\right),$$

$$Q(\alpha) = T'(\alpha)\,T''(\alpha)\,T'''^2(\alpha),$$

$$R(\alpha) = T_0(\alpha)\,Q(\alpha).$$

Тогда

$$P^{\frac{5}{2}+\frac{5}{334}} \ll Q(0) \ll P^{\frac{5}{2}+\frac{5}{334}},$$

так как

$$\frac{132}{167} + \frac{108}{167} + 2\cdot\frac{90}{167} = \frac{5}{2} + \frac{5}{884}.$$

Разобьем интервал $-\frac{1}{\tau} \leqslant \alpha \leqslant 1 - \frac{1}{\tau}$ так же, как это делалось в п. 3 главы VII.

Лемма 9.16.

$$\int\limits_E |T_0^2(\alpha)\,R(\alpha)|^2\,d\alpha \ll Q^2(0)\,P^{2-\frac{5}{334}+\varepsilon}.$$

Доказательство. В силу лемм 9.11 и 3.6, имеем

$$\int\limits_E |T_0^2(\alpha)\,R(\alpha)|^2\,d\alpha \ll P^{\frac{7}{8}\cdot 4+\varepsilon} \int\limits_0^1 |R(\alpha)|^2\,d\alpha \ll$$

$$\ll P^{\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{5}{334}+\varepsilon} \ll Q^2(0)\,P^{2-\frac{5}{334}+\varepsilon}.$$

Лемма 9.17.

$$\sum_{\mathfrak{M}}\int_{\mathfrak{M}} |T_0^2(\alpha) R(\alpha)|^2 \, d\alpha \ll Q^2(0) P^2.$$

Доказательство. Разобьем интервалы $\mathfrak{M}(h, q)$ на два класса:

$$\mathfrak{M}_1: \qquad q \leqslant P^{\frac{9}{14}},$$

$$\mathfrak{M}_2: \qquad P^{\frac{9}{14}} \leqslant q \leqslant P^{1+\varepsilon}.$$

В силу лемм 7.10 и 7.11, на $\mathfrak{M}_2$

$$T_0(\alpha) = O\left(q^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right) + O\left(q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} P\right) =$$

$$= O\left(P^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right) + O\left(P^{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{14}+\varepsilon}\right) =$$

$$= O\left(P^{\frac{7}{8}+\varepsilon}\right).$$

Поэтому имеем, как в лемме 9.15,

$$\sum_{\mathfrak{M}_2}\int_{\mathfrak{M}_2} |T_0^2(\alpha) R(\alpha)|^2 \, d\alpha \ll P^{\frac{7}{2}+\varepsilon} \int_0^1 |R(\alpha)|^2 \, d\alpha \ll$$

$$\ll Q^2(0) P^{2-\frac{5}{334}+\varepsilon}.$$

Далее на $\mathfrak{M}_1$ имеем, в силу лемм 7.10 и 7.11,

$$T_0(\alpha) = O\left(q^{1-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right) + O\left(q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} \min\left(P, |\beta|^{-\frac{1}{4}}\right)\right) =$$

$$= O\left(q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} \min\left(P, |\beta|^{-\frac{1}{4}}\right)\right),$$

$$T'(\alpha) \ll q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} P^{\frac{132}{167}},$$

$$T''(\alpha) \ll q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} P^{\frac{108}{167}}.$$

Тогда

$$\sum_{\mathfrak{M}_1}\int_{\mathfrak{M}_1} |T_0^6(\alpha) T'^2(\alpha) T''^2(\alpha)| \, d\alpha \ll \sum_q q \cdot q^{-\frac{10}{4}} P^{\frac{132}{167}\cdot 2} P^{\frac{108}{167}\cdot 2} \int_{\mathfrak{M}} \min\left(1, |\beta|^{-\frac{1}{4}}\right)^9 d\beta \ll$$

$$\ll \sum_q q^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} P^{2\cdot\frac{132}{167}+2\cdot\frac{108}{167}+6-4} \ll$$

$$\ll P^{2\cdot\frac{132}{167}+2\cdot\frac{108}{167}+2}$$

Поэтому

$$\sum_{\mathfrak{M}_1}\int_{\mathfrak{M}_1}|T_0^6(\alpha)\,T'^2(\alpha)\,T''^2(\alpha)\,T'''^4(\alpha)|\,d\alpha \ll T'''^4(0)\sum_{\mathfrak{M}_1}\int_{\mathfrak{M}_1}|T_0^6(\alpha)\,T'^2(\alpha)\,T''^2(\alpha)|\,d\alpha \ll Q^2(0)\,P^2.$$

Лемма 9.18.

$$\int_0^1 |T_0^2(\alpha)\,R(\alpha)|^2\,d\alpha \ll Q^2(0)\,P^2.$$

Эта лемма вытекает непосредственно из лемм 9.16 и 9.17.

Тем же методом, что и в п. 3, мы легко приходим к следующему заключению: пусть $r_{15}'(N)$ — число решений уравнения

$$p_1^4+p_2^4+\cdots+p_{15}^4=N,$$

где p — простые числа, удовлетворяющие условиям

$$P\leqslant p_\nu\leqslant 2P,\quad 1\leqslant\nu\leqslant 7,\quad P^{\frac{132}{167}}\leqslant p_8,\,p_9\leqslant 2P^{\frac{132}{167}},$$

$$P^{\frac{108}{167}}\leqslant p_{10},p_{11}\leqslant 2P^{\frac{108}{167}},\quad P^{\frac{90}{167}}\leqslant p_{12},\,p_{13},\,p_{14},\,p_{15}\leqslant P^{\frac{90}{167}}.$$

Тогда

$$r_{15}'(N)=\mathfrak{S}(N)\,\Psi_1(N)+O(P^3\,Q^2(0)\,L^{-16}),$$

где

$$\frac{P^3\,Q^2(0)}{L_{15}}\ll\Psi_1(N)\ll\frac{P^3\,Q^2(0)}{L^{15}}.$$

Отсюда получается

Теорема 14. Всякое достаточно большое целое число $N\equiv 15\,(\mathrm{mod}\ 240)$ есть сумма пятнадцати четвертых степеней простых чисел, т. е.

$$H(4)\leqslant 15.$$

6. Доказательство неравенства $H(5)\leqslant 25$

Тем же методом, что и в п. 5, мы без труда можем вывести следующий результат:

Пусть $r_{25}'(N)$ — число решений уравнения

$$p_1^5+p_2^5+\ldots+p_{25}^5=N,$$

где

$$P\leqslant p_\nu\leqslant 2P,\quad 1\leqslant\nu\leqslant 11,$$

$$P^{\lambda_1}\leqslant p_{12},p_{13}\leqslant 2P^{\lambda_1},\qquad \lambda_1=\frac{2\,334\,984}{2\,873\,111},$$

$$P^{\lambda_1\lambda_2}\leqslant p_{14},p_{15}\leqslant 2P^{\lambda_1\lambda_2},\qquad \lambda_2=\frac{238\,712}{291\,873},$$

$$P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \leqslant p_{16},\ p_{17} \leqslant 2P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}, \qquad \lambda_3 = \frac{24\,616}{29\,839},$$

$$P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}} \leqslant p_{18},\ p_{19} \leqslant 2P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}},$$

$$P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}\cdot\frac{272}{321}} \leqslant p_{20},\ p_{21} \leqslant 2P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}\cdot\frac{272}{321}},$$

$$P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}\cdot\frac{272}{321}\cdot\frac{15}{17}} \leqslant p_{22},\ p_{23},\ p_{24},\ p_{25} \leqslant 2P^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}\cdot\frac{272}{321}\cdot\frac{15}{17}}.$$

Тогда

$$r_{25}'(N) = \mathfrak{S}(N)\Psi_2(N)\left(1 + O\left(\frac{1}{L}\right)\right),$$

где

$$\Psi_2(N) \gtrless \frac{P^{6+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}\cdot\frac{272}{321}+2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{2568}{3077}\cdot\frac{272}{321}\cdot\frac{15}{17}}}{L^{25}}.$$

Поэтому имеем:

Теорема 15. Всякое большое нечетное целое число есть сумма двадцати пяти пятых степеней простых чисел, т. е. $H(5) \leqslant 25$.

Чтобы не повторять тех же рассуждений, доказательства неравенств $H(6) \leqslant 37$, $H(7) \leqslant 55$ и $H(8) \leqslant 75$ опускаются.

ГЛАВА X

Системы диофантовых уравнений с простыми неизвестными[1]

1.

Предметом этой и следующей главы является рассмотрение системы диофантовых уравнений:

$$p_1^k + \cdots + p_s^k = N_k,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_1 + \cdots + p_s = N_1,$$

где p — простые числа. В этой главе будет дана асимптотическая формула для числа решений этой системы при $s \geqslant s_0$, где s_0 задается следующей табличкой:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_0	7	19	49	127	315	763	1781	4071	9193	$4.14k(k+1)(k+2)\log k$

2. Леммы, необходимые для доказательства теоремы 16

Лемма 10.1.[2] Пусть

$$I = \int_0^1 e(\varphi(x))\,dx, \quad \varphi(x) = \gamma_k x^k + \cdots + \gamma_1 x,$$

где $\gamma_k, \ldots, \gamma_1$ — вещественные числа. Тогда

$$I \ll Z, \quad Z = (\max(1, |\gamma_1|, \ldots, |\gamma_k|))^{-\alpha}.$$

[1] По вопросам, излагаемым в главах X и XI, см. также статью К. К. Марджанишвили „Об одной задаче аддитивной теории чисел". Изв. АН СССР, Серия математическая, т. 4 (1940), стр. 193—194. Прим. ред.

[2] И. М. Виноградов. Математический сборник, 3 (1933), 435—471.

Доказательство. Мы можем разделить интервал (0.1) на конечное число ($< k^2$) частей, в каждой из которых функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ монотонны. Пусть $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ такой подинтервал. Пусть

$$J = \int_{x_1}^{x_2} e^{2\pi i\varphi(x)}\, dx.$$

Пусть $v_1 = \varphi(x_1)$, $v_2 = \varphi(x_2)$. Тогда

$$J = \int_{v_1}^{v_2} e^{2\pi i v} \frac{dv}{\varphi'(x)},$$

где $\varphi'(x)$ рассматривается как функция от v.

Предположим, что $\varphi'(x)$ есть возрастающая функция от v в интервале (v_1, v_2); тогда

$$\int_{v_1}^{v_2} \sin 2\pi v \frac{dv}{\varphi'(x)} = \int_{v_1}^{[v_1]+\frac{1}{2}} \sin 2\pi v \frac{dv}{\varphi'(x)} + \int_{[v_1]+\frac{1}{2}}^{[v_1]+1} \sin 2\pi v \frac{dv}{\varphi'(x)} + \ldots$$

Правая часть представляет собой знакочередующийся ряд, а абсолютные величины членов ряда образуют убывающую последовательность. Поэтому

$$J \ll \max_{v,\,\sigma} \left| \int_{v}^{v+\sigma} \frac{dv}{\varphi'(x)} \right|, \quad |\sigma| \leqslant 1.$$

Аналогичный результат имеет место для убывающей $\varphi'(x)$.

Далее,

$$J \ll \max \left| \int_{\Psi(v)}^{\Psi(v+\sigma)} dx \right| = \max |\Psi(v+\sigma) - \Psi(v^*)|,$$

где $x = \Psi(v)$ — функция, обратная к $v = \varphi(x)$.

Обозначим $x_0 = \Psi(v)$, $x' = \Psi(v+\sigma)$. Задача теперь свелась к оценке

$$x_0 - x'$$

$$\text{при} \quad 0 \leqslant x_0 - x' \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |\varphi(x') - \varphi(x_0)| = |\sigma'| \leqslant 1.$$

Выберем

$$t = a(x' - x_0), \quad a = \frac{1}{k},$$

и $\Delta f(x) = f(x+t) - f(x)$, $\Delta^{m+1} f(x) = \Delta\Delta^m f(x)$. Пусть

$$T = \Delta^s \varphi(x).$$

Тогда

$$T=\gamma_k t^s (A_{k,0} x_0^{k-s}+A_{k,1} x^{k-s-1} t+\ldots+A_{k,k-s} t^{k-s})+$$
$$+\gamma_{k-1} t^s \left(A_{k-1,0} x_0^{k-s-1}+\ldots+A_{k-1,k-s-1} t^{k-s-1}\right)+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\gamma_s t^s.$$

Пусть $\frac{c}{k+1}$ обозначает верхнюю границу коэффициентов A. Предположим, что

$$|\gamma_s|>2(|\gamma_k|+\ldots+|\gamma_{s+1}|)c$$

(для $s=k$ такого неравенства не нужно). Тогда

$$T\geqslant\frac{1}{2}|\gamma_s|t^s.$$

С другой стороны,

$$T=\Delta^{s-1}\Delta\varphi(x)\leqslant 2^k.$$

Имеем тогда

$$\frac{1}{2}|\gamma_s|t^s\leqslant 2^k,$$

т. е. при $|\gamma_s|\geqslant 1$,

$$t\ll|\gamma_s|^{-1/s}\leqslant|\gamma_s|^{-a}.$$

Поэтому

$$t\ll(\max(1, |\gamma_k|, \ldots, |\gamma_1|))^{-a},$$

и лемма получается непосредственно.

Лемма 10.2. При тех же предположениях, что в лемме 10.1,

$$I\ll\min(1, |\gamma_k\ldots\gamma_1|^{-a^2})$$

и, при $\delta<1$,

$$\int_0^\delta e(\varphi(x))\,dx\ll\min(1, |\gamma_k\ldots\gamma_1|^{-a^2}).$$

Доказательство. Первое неравенство следует непосредственно из леммы 10.1 и неравенства

$$\min(a_k, \ldots, a_1)\leqslant(a_1\ldots a_k)^{1/k} \qquad \text{при} \quad a_\nu\geqslant 0.$$

При $\delta\leqslant 1$ имеем

$$\int_0^\delta e(\gamma_k x^k+\ldots+\gamma_1 x)\,dx=\delta\int_0^1 e(\gamma_k\delta^k y^k+\ldots+\gamma_1\delta y)\,dy\ll$$
$$\ll\delta\min\left(1, |\gamma_k\ldots\gamma_1|^{-a^2}\delta^{-\frac{1}{2}(a+1)}\right)\ll$$
$$\ll\min(1, |\gamma_k, \ldots\gamma_1|^{-a^2}),$$

так как $1\geqslant\frac{1}{2}(a+1)$.

Лемма 10.3. Пусть $f(x)=\alpha_k x^k+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ и пусть для $2\leqslant\nu\leqslant k$

$$\alpha_\nu=\frac{h_\nu}{q_\nu}+\frac{\theta_\nu}{q_\nu\tau_\nu},\quad (h_\nu, q_\nu)=1,\quad |\theta_\nu|\leqslant 1,$$

$$P^{\frac{1}{2}-\frac{a}{2}+a^7}<q_1\leqslant\tau_1=P^{\frac{1}{2}},\quad q\leqslant P^{\frac{1}{2}a-2a^7},\quad \tau_\nu=P^{\nu-\frac{1}{2}a+a^7}.$$

Тогда

$$S=\sum_{x=1}^{P} e(f(x))=O\left(P^{1-a^7}\right).$$

Доказательство. Пусть $D=q_2\ldots q_k$. Тогда

$$D\leqslant P^{\left(\frac{1}{2}a-2a^7\right)(k-1)}\leqslant P^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-2a^7(k-1)}$$

и для $2\leqslant\nu\leqslant k$

$$\frac{D}{q_\nu}\leqslant P^{\left(\frac{1}{2}a-2a^7\right)(k-2)}\leqslant P^{\frac{1}{2}-a-2a^7(k-2)}.$$

Пусть $x=D\xi+\eta,\quad \eta=0,\ldots, D-1,\quad -\frac{\eta}{D}\leqslant\xi\frac{P-\eta}{D}$.

В соответствии с η разобьем сумму S на D частей, каждую вида:

$$K=\Psi(\eta)\sum_{\xi} e\left(\frac{\theta_k}{q_k\tau_k}(D\xi+\eta)^k+\ldots+\frac{\theta_2}{q_2\tau_2}(D\xi+\eta)^2+\left(\frac{h_1}{q_1}+\frac{\theta_1}{q_1\tau_1}\right)(D\xi+\eta)\right),$$

где $|\Psi(\eta)|=1$. Разобьем K на $\ll P^{\frac{1}{2}-\frac{a}{2}}D^{-1}$ сумм, каждая длины $\ll P^{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}}$. Для каждой частичной суммы существует константа C такая, что

$$\frac{\theta_k}{q_k\tau_k}(D\xi+\eta)^k+\ldots+\frac{\theta_2}{q_2\tau_2}(D\xi+\eta)^2=C+O\left(P^{-a^7}\right),$$

так как, при $\xi-\xi'\ll P^{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}},\quad 2\leqslant\nu\leqslant k$,

$$\left|\frac{\theta_\nu}{q_\nu\tau_\nu}\left((D\xi+\eta)^\nu-(D\xi'+\eta)^\nu\right)\right|\ll\frac{D|\xi-\xi'|}{q_\nu\tau_\nu}P^{\nu-1}\ll P^{-a^7(2k-3)}\ll P^{-a^7}.$$

Поэтому эта частичная сумма может быть заменена суммой

$$\sum_{\xi} e\left(\left(\frac{h_1 D}{q_1}+\frac{\theta_1 D}{q_1\tau_1}\right)\xi\right),$$

где ξ пробегает некоторый интервал длины $P^{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}}$ с ошибкой $O\left(P^{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}-a^7}\right)$.

Пусть

$$\frac{h_1}{q_1}D=\frac{h'}{q'},\ (h', q')=1,\ P^{a^6}\ll q'\leqslant P^{\frac{1}{2}},\quad \frac{D}{\tau_1}\ll P^{-\frac{a}{2}}.$$

Тогда, согласно лемме 1.8,

$$\sum_{\xi} e\left(\left(\frac{h_1 D}{q_1}+\frac{\theta D}{q_1 \tau_1}\right)\xi\right) \leqslant \frac{2}{\left\{\frac{h_1 D}{q_1}+\frac{\theta D}{q_1 \tau_1}\right\}} \ll P^{\frac{1}{2}},$$

так как

$$\left\{\frac{h_1 D}{q_1}+\frac{\theta D}{q_1 \tau_1}\right\} > \frac{1}{q}-O\left(\frac{D}{q_1 \tau_1}\right) > P^{-\frac{1}{2}}-O\left(P^{-\frac{1}{2}-a^7}\right) \gg P^{-\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$K \ll P^{\frac{1}{2}-\frac{a}{2}} D^{-1} P^{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}-a^7} \ll P^{1-a^7} D^{-1},$$

и мы имеем

$$S \ll P^{1-a^7}.$$

3. Результат, относящийся к проблеме Tarry

Теорема 16. Пусть

$$S(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)=\sum_{x \leqslant P} e(\alpha_k x^k+\cdots+\alpha_1 x).$$

Тогда

$$T(P)=\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)|^{2t} d\alpha_k \ldots d\alpha_1 = c_1 c_2 P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)} + O\left(P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)-c(k)}\right),$$

если $t \geqslant t_0$, где t_0 задается следующей табличкой:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_0	4	9	24	63	157	381	890	2040	4596

а при $k \geqslant 11$

$$t_0=\frac{1}{4}k(k+1)\left(\left[\frac{6\log k+2\log\log 2k+\log 23\cdot 2}{-\log(1-a)}\right]+k+1\right)$$

($\sim 1\cdot 5k^3 \log k$ для больших k),

постоянные c_1, c_2 задаются формулами

$$c_1=\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_0^1 e(\beta_k x^k+\cdots+\beta_1 x)\,dx\right|^{2t} d\beta_k \ldots d\beta_1,$$

$$c_2=\sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_k=1}^{\infty} \sum_{\substack{h_1=1 \\ (h_1, q_1)=1}}^{q_1} \cdots \sum_{\substack{h_k=1 \\ (h_k, q_k)=1}}^{q_k} \left|\frac{\sum_{x=1}^{q_1 \cdots q_k} e\left(\frac{h_k}{q_k}x^k+\cdots+\frac{h_1}{q_1}x\right)}{q_1 \cdots q_k}\right|^{2t}.$$

Доказательство. 1) В силу периодичности функции $S(\alpha_k, \ldots \alpha_1)$, имеем

$$T(P) = \int\limits_{-\frac{1}{\tau_1}}^{1-\frac{1}{\tau_1}} d\alpha_1 \ldots \int\limits_{-\frac{1}{\tau_k}}^{1-\frac{1}{\tau_k}} |S|^{2l}\, d\alpha_k \ldots d\alpha_1,$$

где

$$\tau_1 = P^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_\nu = P^{\nu - \frac{1}{2}\sigma + \sigma^7}, \quad 2 \leqslant \nu \leqslant k.$$

Известно, что для всякой точки k-мерного пространства $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ имеется рациональная точка $\left(\frac{h_1}{q_1}, \ldots, \frac{h_k}{q_k}\right)$ такая, что

$$\alpha_\nu = \frac{h_\nu}{q_\nu} + \beta_\nu, \quad |\beta_\nu| \leqslant q_\nu^{-1} \tau_\nu^{-1}.$$

Пусть $\mathfrak{M}\left(\frac{h_1}{q_1}, \ldots, \frac{h_k}{q_k}\right)$ — область, определяемая неравенствами

$$\left|\alpha_\nu - \frac{h_\nu}{q_\nu}\right| \leqslant \frac{1}{q_\nu \tau_\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant k,$$

в которых

$$1 \leqslant q_\nu \leqslant P^{\frac{1}{2}\sigma - 2\sigma^7} \; (2 \leqslant \nu \leqslant k), \quad 1 \leqslant q_1 \leqslant P^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma + \sigma^7}.$$

Легко показать, что никакие две области $\mathfrak{M}$ не перекрываются. Пусть E — часть области

$$-\frac{1}{\tau_\nu} \leqslant \alpha_\nu \leqslant 1 - \frac{1}{\tau_\nu},$$

остающаяся после удаления всех $\mathfrak{M}$. Полагаем

$$T_{(1)} = \int \underset{E}{\cdots} \int |S|^{2l}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k$$

и

$$T_{(2)} = \sum_{\mathfrak{M}} Q\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right),$$

где

$$Q\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right) = \int \underset{\mathfrak{M}}{\cdots} \int |S|^{2l}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k.$$

Тогда

$$T = T_{(1)} + T_{(2)}.$$

2) Пусть $H = q_1 \ldots q_k$. Если

$$x = H\xi + \eta, \quad \eta = 1, \ldots, H, \quad -\eta/H < \xi \leqslant (P - \eta)/H,$$

то на $\mathfrak{M}$ имеем

$$S=\sum_{\eta} W_{\eta}\, e\left(\frac{h_k}{q_k}\eta^k+\cdots+\frac{h_1}{q_1}\eta\right),$$

где

$$W_{\eta}=\sum_{\xi} e\left(\beta_k(H\xi+\eta)^k+\cdots+\beta_1(H\xi+\eta)\right).$$

Пусть

$$\varphi(\xi)=\beta_k(H\xi+\eta)^k+\cdots+\beta_1(H\xi+\eta).$$

Тогда для больших P

$$|\varphi'(\xi)|\leqslant\frac{kHP^{k-1}}{q_k\tau_k}+\cdots+\frac{H}{q_1\tau_1}\leqslant\frac{1}{2},$$

так как при $2\leqslant\nu\leqslant k$

$$\frac{HP^{\nu-1}}{q_\nu\tau_\nu}\leqslant\frac{P^{\nu-1}P^{\left(\frac{1}{2}a-2a^7\right)(k-2)+\frac{1}{2}+a^7-\frac{1}{2}a}}{P^{\nu-\frac{1}{2}a+a^7}}=P^{-a-2a^7(k-2)}=$$

$$=O(P^{-a})=o(1)$$

и

$$\frac{H}{q_1\tau_1}\leqslant\frac{P^{\left(\frac{1}{2}a-2a^7\right)(k-1)}}{P^{\frac{1}{2}}}=P^{-\frac{1}{2}a-2a^7(k-1)}=o(1).$$

В силу леммы 7.5, имеем

$$W_{\eta}=\int\limits_{-\eta/H}^{(P-\eta)/H} e\left(\beta_k(H\xi+\eta)^k+\cdots+\beta_1(H\xi+\eta)\right)d\xi+O(1).$$

Пусть $x=P^{-1}(\xi H+\eta)$, $\gamma_\nu=\beta_\nu P^\nu$ $(1\leqslant\nu\leqslant h)$; имеем

$$W_{\eta}=\frac{P}{H}R+O(1),$$

где

$$R=\int\limits_0^1 e(\gamma_k x^k+\cdots+\gamma_1 x)\,dx.$$

Итак,

$$S=B\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots,\frac{h_1}{q_1}\right)PR+O(H), \tag{1}$$

где

$$B\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots,\frac{h_1}{q_1}\right)=\frac{1}{H}\sum_{\eta=1}^{H} e\left(\frac{h_k}{q_k}\eta_k+\cdots+\frac{h_1}{q_1}\eta\right).$$

3) По теореме 1, имеем

$$B\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right) = \frac{1}{H} \sum_{\eta=1}^{H} e\left(\left(\frac{q_1 \ldots q_{k-1} h_k}{d} \eta^k + \ldots + \frac{h_1 q_2 \ldots q_k}{d} \eta\right) \Big/ \frac{H}{d}\right) =$$

$$= \frac{d}{H} \sum_{\eta=1}^{H/d} e\left(\left(\frac{q_1 \ldots q_{k-1} h_k}{d} \eta^k + \ldots + \frac{h_1 q_2 \ldots q_k}{d} \eta\right) \Big/ \frac{H}{d}\right) =$$

$$= \frac{d}{H} O\left(\frac{H}{d}\right)^{1-a+\varepsilon} \leqslant \left(\frac{d}{H}\right)^{a-\varepsilon},$$

где $d = (q_1 \ldots q_{k-1} h_k, \ldots, h_1 q_2 \ldots q_k, q_1 \ldots q_k)$. Так как $(h_\nu, q_\nu) = 1$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$, то

$$d = (q_2 \ldots q_{k-1}, q_1 q_3 \ldots q_k, \ldots, q_1 \ldots q_{k-1}).$$

Очевидно,

$$d \leqslant \min(q_2 \ldots q_{k-1}, q_1 q_3 \ldots q_k, \ldots, q_1 \ldots q_{k-1}) \leqslant$$
$$\leqslant (q_2 \ldots q_{k-1} q_1 q_3 \ldots q_k \ldots q_1 \ldots q_{k-1})^a =$$
$$= H^{1-a}.$$

Поэтому имеем

$$B\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right) = O\left(H^{-a^2+\varepsilon}\right). \tag{2}$$

В силу леммы 10.1,

$$B\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right) PR = O\left(PH^{-a^2+\varepsilon} Z\right). \tag{3}$$

Так как на $\mathfrak{M}$

$$H = q_1 \ldots q_k \leqslant P^{\frac{1}{2}+a^7-\frac{1}{2}a+(k-1)\left(\frac{1}{2}a-2a^7\right)} = P^{1-a-a^7(2k-3)}$$

и

$$Z = \min(1, |\gamma|^{-a}, \ldots, |\gamma_k|^{-a}) = \min(1, (P|\beta|)^{-a}, \ldots, (P^k|\beta_k|)^{-a}) \geqslant$$

$$\geqslant \min\left(1, P^{-\frac{1}{2}a}, P^{-\frac{1}{2}a^2+a^6}\right) \geqslant P^{-\frac{1}{2}a},$$

то

$$H = H^{-a^2+\varepsilon} H^{1+a^2-\varepsilon} =$$
$$= H^{-a^2+\varepsilon} P^{(1+a^2-\varepsilon)(1-a-a^7(2k-3))} \leqslant$$
$$\leqslant H^{-a^2+\varepsilon} P \cdot P^{-\frac{1}{2}a} = O\left(PH^{-a^2+\varepsilon} Z\right).$$

В силу (1) и (3), имеем на $\mathfrak{M}$

$$S = O\left(PH^{-a^2+\varepsilon} Z\right). \tag{4}$$

4) Из (1), (3), (4) и простого неравенства

$$\left|\,|\xi|^{2t}-|\eta|^{2t}\right|\leqslant 2t\,|\xi-\eta|\left(|\xi|^{2t-1}+|\eta|^{2t-1}\right)$$

имеем

$$|S|^{2t}-\left|B\left(\frac{h_k}{q_k},\ \ldots,\ \frac{h_1}{q_1}\right)\right|^{2t}P^{2t}\,|R|^{2t}\ll HP^{2t-1}H^{-a^2(2t-1)+\varepsilon}Z^{2t-1}.$$

Таким образом,

$$Q\left(\frac{h_k}{q_k},\ \ldots,\ \frac{h_1}{q_1}\right)=$$

$$=\left|B\left(\frac{h_k}{q_k},\ \ldots,\ \frac{h_1}{q_1}\right)\right|^{2t}P^{2t}\int\limits_{-q_k^{-1}\tau_k^{-1}}^{q_k^{-1}\tau_k^{-1}}\cdots\int\limits_{-q_1^{-1}\tau_1^{-1}}^{q_1^{-1}\tau_1^{-1}}|R|^{2t}\,d\beta_1\ldots d\beta_k+$$

$$+O\left(HP^{2t-1}H^{-a^2(2t-1)+\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}Z^{2t-1}\,d\beta_1\ldots d\beta_k\right).$$

Пусть $\delta_\nu=\max(1,\ |\gamma_\nu|)$. Очевидно,

$$\prod_{\nu=1}^{k}\delta_\nu=\prod_{\nu=1}^{k}\max(1,\ |\gamma_\nu|)\leqslant\max(1,\ |\gamma_1|,\ \ldots,\ |\gamma_k|)^k,$$

и мы имеем

$$Z\leqslant\prod_{\nu=1}^{k}\delta_\nu^{-a^2}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}Z^{2t-1}\,d\beta_1\ldots d\beta_k=P^{-\frac{1}{2}k(k+1)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}Z^{2t-1}\,d\gamma_1\ldots d\gamma_k\leqslant$$

$$\leqslant P^{-\frac{1}{2}k(k+1)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\gamma_1\ldots d\gamma_k}{(\delta_1\ldots\delta_k)^{a^2(2t-1)}}=$$

$$=O\left(P^{-\frac{1}{2}k(k+1)}\right),$$

так как $a^2(2t-1)>1$ (т. е. $2t>k^2+1$).

Следовательно,

$$Q\left(\frac{h_k}{q_k},\ \ldots,\ \frac{h_1}{q_1}\right)=$$

$$=\left|B\left(\frac{h_k}{q_k},\ \ldots,\ \frac{h_1}{q_1}\right)\right|^{2t}P^{2t}\int\limits_{-q_k^{-1}\tau_k^{-1}}^{q_k^{-1}\tau_k^{-1}}\cdots\int\limits_{-q_1^{-1}\tau_1^{-1}}^{q_1^{-1}\tau_1^{-1}}|R|^{2t}\,d\beta_1\ldots d\beta_k+$$

$$+O\left(P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)-1}H^{1-a^2(2t-1)+\varepsilon}\right)=$$

$$=\left|B\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots,\frac{h_1}{q_1}\right)\right|^{2t}P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)}\int\limits_{-q_k^{-1}\tau_k^{-1}P^k}^{q_k^{-1}\tau_k^{-1}P^k}\cdots\int\limits_{q_1^{-1}\tau_1^{-1}P}^{q_k^{-1}\tau_k^{-1}P}|R|^{2t}\,d\gamma_1\ldots d\gamma_k+$$

$$+O\left(P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)-1}H^{1-a^2(2t-1)+\varepsilon}\right). \qquad (5)$$

5) Имеем:

$$\int\limits_{-q_k^{-1}\tau_k^{-1}P^k}^{q_k^{-1}\tau_k^{-1}P^k}\cdots\int\limits_{-q_1^{-1}\tau_1^{-1}P}^{q_1^{-1}\tau_1^{-1}P}|R|^{2t}\,d\gamma_1\ldots d\gamma_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}|R|^{2t}\,d\gamma_1\ldots d\gamma_k+$$

$$+O\left(\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\gamma_1\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\gamma_{j-1}\int\limits_{\tau_j^{-1}q_j^{-1}P^j}^{\infty}d\gamma_j\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\gamma_{j+1}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}|Z|^{2t}\,d\gamma_k\right)=$$

$$=c_1+O\left(\sum_{j}\int\limits_{\tau_j^{-1}q_j^{-1}P^j}^{\infty}\delta_j^{-2ta^2}\,d\gamma_j\right)=$$

$$=c_1+O\left(\int\limits_{P^{a^7}}^{\infty}\gamma_j^{-2ta^2}\,d\gamma_j\right)=$$

$$=c_1+O\left(P^{-(2ta^2-1)a^7}\right).$$

Таким образом, согласно (5) и (2), имеем

$$Q\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots,\frac{h_1}{q_1}\right)=c_1\left|B\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots,\frac{h_1}{q_1}\right)\right|^{2t}P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)}+$$

$$+O\left(P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)-(2ta^2-1)a^7}H^{-2ta^2+\varepsilon}\right)+$$

$$+O\left(P^{2t-1-\frac{1}{2}k(k+1)}H^{1-a^2(2t-1)+\varepsilon}\right). \qquad (6)$$

Пусть

$$A=\sum_{q_k\le P^{\frac{1}{2}a-2a^7}}\cdots\sum_{q_2\le P^{\frac{1}{2}a-2a^7}}\ \sum_{q_1\le P^{\frac{1}{2}+a^7-\frac{1}{2}a}}\ \sum_{\substack{h_1=1\\(h_1,q_1)=1}}^{q_1}\cdots\sum_{\substack{h_k=1\\(h_k,q_k)=1}}^{q_k}\left|B\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots,\frac{h_1}{q_1}\right)\right|^{2t}.$$

Тогда, в силу (6),

$$T_{(2)}=c_1 AP^{2l-\frac{1}{2}k(k+1)}+O\left(P^{2l-\frac{1}{2}k(k+1)-(2la^2-1)a^7}\sum_{h,q}H^{-2la^2+\varepsilon}\right)+$$

$$+O\left(P^{2l-1-\frac{1}{2}k(k+1)}\sum_{h,q}H^{1-a^2(2l-1)+\varepsilon}\right)=$$

$$=c_1 AP^{2l-\frac{1}{2}k(k+1)}+O\left(P^{2l-\frac{1}{2}k(k+1)-c_3}\right), \qquad (7)$$

так как

$$\sum_{h,q}H^{-2la^2+\varepsilon}\leqslant\begin{cases}\sum\limits_{q_1=1}^{\infty}\cdots\sum\limits_{q_k=1}^{\infty}H^{1-2la^2+\varepsilon}=O(1), & \text{при}\quad k>3,\\ \sum\limits_{q}H^{-1+\varepsilon}=O(P^{\varepsilon}), & \text{при}\quad k=2,3\end{cases}$$

и

$$\sum_{h,q}H^{1-a^2(2l-1)+\varepsilon}\leqslant\begin{cases}\sum\limits_{q_1=1}^{\infty}\cdots\sum\limits_{q_k=1}^{\infty}H^{2-a^2(2l-1)+\varepsilon}=O(1), & \text{при}\quad k\geqslant 5,\\ \sum\limits_{q}H^{-1+\frac{1}{16}}=O\left(P^{\frac{1}{4}}\right), & \text{при}\quad k=4,\\ \sum\limits_{q}H^{\frac{1}{9}}=O\left(P^{\frac{20}{27}}\right), & \text{при}\quad k=3,\\ \sum\limits_{q}H^{\frac{1}{4}}=O\left(P^{\frac{5}{8}}\right), & \text{при}\quad k=2.\end{cases}$$

(В качестве примера дадим подробное доказательство для $k=2$:

$$\sum_{q}H^{\frac{1}{4}}=\sum_{q_2\leqslant P^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2^6}}}q_2^{\frac{1}{4}}\sum_{q_1\leqslant P^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+2^{-7}}}q_1^{\frac{1}{4}}\ll\left(P^{\frac{1}{4}-2^{-6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+2^{-7}}\right)^{\frac{5}{4}}=P^{\frac{5}{8}}\Big).$$

Далее, для $k\geqslant 4$:

$$A=c_2+O\left(\sum_{j=2}^{k}\sum_{q_k=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_{j-1}=1}^{\infty}\sum_{q_j\geqslant P^{\frac{1}{2}a-2a^7}}\sum_{q_{j+1}=1}^{a}\cdots\sum_{q_k=1}^{\infty}\frac{1}{H^{2la^2-1+\varepsilon}}\right)+$$

$$+O\left(\sum_{q_k=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_2=1}^{\infty}\sum_{q_1\geqslant P^{\frac{1}{2}+a^7-\frac{1}{2}a}}\frac{1}{H^{2la^2-1+\varepsilon}}\right)=$$

$$=c_2+O(P^{-c_4}).$$

Для $k=2$ и 3 это заключение также справедливо. Действительно для $k=2$, например:

$$A=c_2+O\left(\sum_{q>P^{\frac{1}{8}}}\sum_{q'=1}^{\infty} qq'\left(\frac{q,q'}{qq'}\right)^4\right)=c_2+O\left(\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{q\geqslant P^{\frac{1}{8}}/d}\frac{1}{d^2q^3}\right)=$$

$$=c_2+O\left(\sum_{d\leqslant P^{\frac{1}{16}}}\sum_{q\geqslant P^{\frac{1}{16}}}\frac{1}{d^2q^3}\right)+O\left(\sum_{d>P^{\frac{1}{16}}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{d^2q^3}\right)=$$

$$=c_2+O(P^{-c_4}).$$

В силу (7), имеем

$$T_{(2)}=c_1c_2P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)}+O\left(P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)-c_5}\right). \tag{8}$$

6) Рассмотрим теперь $T_{(1)}$. В силу леммы 5.8, на E имеем

$$S=O(P^{1-\lambda}),\qquad \lambda=\frac{1}{23.2k^7(\log 2k)^2}.$$

6.1) Предположим, что $k\leqslant 10$. Тогда, по теореме 5,

$$T_{(1)}\ll P^{2(1-\lambda)}\int_0^1\cdots\int_0^1|T|^{2t-2}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_k\ll$$

$$\ll P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)-c_6}.$$

6.2) Предположим, что $k>10$. Тогда, по теореме 7,

$$T_{(1)}\ll P^{(2t-bn)(1-\lambda)}\int_0^1\cdots\int_0^1|S|^{bn}\,d\alpha_k\ldots d\alpha_1\ll$$

$$\ll P^{2t-(2t-bn)\lambda-\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)\sigma+\varepsilon}.$$

Берем

$$n=\left[\frac{6\log k+2\log\log 2k+\log 23.2}{-\log(1-a)}\right]+1.$$

Так как

$$2t>bn+\frac{k(k+1)}{2\lambda}\sigma,$$

то

$$T_{(1)}\ll P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)-c_7}.$$

Замечание. Так как $n < 7.90 k \log k$ и

$$bn + \frac{k(k+1)}{2\lambda}\sigma \leqslant 3.95k(k+1)(k+2)\log k +$$

$$+ \frac{1}{2}k(k+1) \times 23.2k^7 (\log 2k)^2 (1-a)^n \leqslant$$

$$\leqslant 3.95\,k(k+1)(k+2)\log k + \frac{1}{2}k^2(k+1) <$$

$$< 4.14k(k+1)(k+2)\log k - 1,$$

то мы снова получаем этот результат, если только

$$t \geqslant 2.07k(k+1)(k+2)\log k - 1.$$

4. Формулировка теоремы 17

Пусть k — целое число $\geqslant 2$, s — целое число $\geqslant s_0$, где s_0 задается следующей табличкой:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\geqslant 11$
s_0	7	19	49	127	315	763	1781	4081	9173	$4.14k(k+1)(k+2)\log k$

Пусть $I(N_k, \ldots, N_1)$ обозначает число решений системы:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 + p_2 + \cdots + p_s = N_1, \\ p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_s^2 = N_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1^k + p_2^k + \cdots + p_s^k = N_k, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где p — простые числа. Пусть $N_k^a = P$. Число решений системы (1) может быть выражено в виде

$$I(N_k, \ldots, N_1) = \frac{b_1 P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)} \mathfrak{S}(N_k, \ldots, N_1)}{L^s} + O\left(\frac{P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}}{L^{s+1}}\log L\right),$$

где

$$b_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e(\gamma_k x^k + \cdots + \gamma_1 x)\,dx\right)^s e\left(-\frac{N_k}{P^k}\gamma_k - \cdots - \frac{N_1}{P}\gamma_1\right) d\gamma_k \ldots d\gamma_1,$$

$$\mathfrak{S}(N_k, \ldots, N_1) = \sum_{q_1, \ldots, q_k = 1}^{\infty} A(q_1, \ldots, q_k),$$

$$A(q_1, \ldots, q_k) = \sum_{h_1, \ldots, h_k}{}' T^s e\left(-\frac{h_k}{q_k}N_k - \cdots - \frac{h_1}{q_1}N_1\right)$$

(здесь $h_1, \ldots, h_k$ пробегают приведенную систему вычетов соответственно, $\bmod q_1, \ldots, \bmod q_k$), и

$$T = \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_x{}' e\left(\frac{h_k}{q_k} x^k + \cdots + \frac{h_1}{q_1} x\right)$$

(здесь Q есть общее наименьшее кратное чисел $q_1, \ldots, q_k$, а x пробегает приведенную систему вычетов по модулю Q).

5. Доказательство теоремы

1) Пусть

$$S = (\alpha_k, \ldots, \alpha_1) = \sum_{p \leqslant P} e(f(x)), \quad f(x) = \alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x.$$

Тогда

$$I(N_k, \ldots, N_1) = \int_0^1 d\alpha_1 \ldots \int_0^1 S^s(\alpha_k, \ldots, \alpha_1) e(-N_k \alpha_k - \cdots - N_1 \alpha_1) d\alpha_k =$$

$$= \int_{-\tau_1^{-1}}^{1-\tau_1^{-1}} d\alpha_1 \ldots \int_{-\tau_k^{-2}}^{1-\tau_k^{-1}} S^s(\alpha_k, \ldots, \alpha_1) e(-N_k \alpha_k - \cdots - N_1 \alpha_1) d\alpha_k,$$

где $\tau_\nu = P^\nu L^{-\sigma_\nu}$ и

$$\sigma_\nu \geqslant 2^{6k+1}(\sigma_k + \cdots + \sigma_{\nu+1} + s_1 + 1),$$

а s_1 — некоторое заданное целое число.

Для всякого α_ν из $(-\tau_\nu^{-1}, 1 - \tau_\nu^{-1})$ существует пара целых чисел h_ν и q_ν, такая что

$$\alpha_\nu - h_\nu/q_\nu = \beta_\nu, \quad |\beta_\nu| \leqslant \frac{1}{q_\nu \tau_\nu}, \quad (h_\nu, q_\nu) = 1, \quad 0 < q_\nu \leqslant \tau_\nu.$$

Таким образом, всякая точка $(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)$ области интегрирования содержится в подобласти вида

$$|\alpha_\nu - h_\nu/q_\nu| \leqslant q_\nu^{-1} \tau_\nu^{-1}, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant k.$$

Мы разбиваем эти подобласти на такие классы:

1°. Подобласти, у которых $L^{\sigma_k} \leqslant q_k \leqslant \tau_k$; обозначаем их m_k.

2°. Подобласти, у которых $0 < q_k < L^{\sigma_k}$ и $L^{\sigma_{k-1}} \leqslant q_{k-1} \leqslant \tau_{k-1}$; обозначаем их m_{k-1}.

. . . .

ν°. Подобласти, у которых $0 < q_k < L^{\sigma_k}$, $0 < q_{k-\nu+2} < L^{\sigma_{\nu-k+2}}$, но $L^{\sigma_{k-\nu+1}} \leqslant$ $\leqslant q_{k-\nu+1} \leqslant \tau_{k-\nu+1}$; обозначаем их $m_{k-\nu+1}$.

. . . .

k° Подобласти, у которых $0<q_k<L^{\sigma_k}, \ldots, 0<q_2<L^{\sigma_2}$, но $L^{\sigma_1}\leqslant \leqslant q_1 \leqslant \tau_1$; обозначаем их m_1.

$(k+1)$° Подобласти, у которых $0<q_\nu<L^{\sigma_\nu}$, $1\leqslant \nu \leqslant k$; обозначаем их $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right)$.

Легко убедиться в том, что никакие два $\mathfrak{M}$ не перекрываются. Пусть $\mathfrak{N}$ — часть области интегрирования, не лежащая ни в одном $\mathfrak{M}$. Тогда

$$I(N_k, \ldots, N_1)=\left(\sum_{\mathfrak{M}}\int_{\mathfrak{M}}+\int_{\mathfrak{N}}\right) S^s e(-\alpha_k N_k-\cdots-\alpha_1 N_1)\, d\alpha_k \ldots d\alpha_1.$$

2) Лемма 10.4. Пусть

$$S^*(\beta_k, \ldots, \beta_1)=\int_2^P \frac{e(\Psi(x))}{\log x}\, dx, \quad \Psi(x)=\beta_k x^k+\cdots+\beta_1 x.$$

Тогда на $\mathfrak{M}\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right)$

$$S(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)= T\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right)\frac{1}{\varphi(Q)} S^*(\beta_k, \ldots, \beta_1)+O\left(Pe^{-c_1\sqrt{L}}\right),$$

где

$$T\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right)=\sum_{\substack{x=1\\(x,\, Q)=1}}^{Q} e\left(\frac{h_k}{q_k}x^k+\cdots+\frac{h_1}{q_1}x\right),$$

а Q обозначает наименьшее кратное чисел $q_k, \ldots, q_1$.

Доказательство. Очевидно, $Q<L^{\sigma_1+\cdots+\sigma_k}$.
Пусть

$$S_m=\sum_{2\leq p\leq m} e\left(\frac{h_k}{q_k}p^k+\cdots+\frac{h_1}{q_1}p\right), \quad S_1=0.$$

Тогда, по теореме Siegel-Walfisz'a (лемма 7.14),

$$S_m=\sum_{\substack{x=1\\(x,\, Q)=1}}^{Q} e\left(\frac{h_k}{q_k}x^k+\cdots+\frac{h_1}{q_1}x\right)\sum_{\substack{p\leq m\\ p\equiv x\, (Q)}} 1+O(Q^{\varepsilon})=$$

$$=T\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right)\frac{\mathrm{li}\, m}{\varphi(Q)}+O\left(Pe^{-c_2\sqrt{L}}\right).$$

Мы имеем

$$S(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)=\sum_{2\leq m\leq P}(S_m-S_{m-1})\, e(\Psi(m))=$$

$$=\sum_{2\leq m\leq P} S_m(e(\Psi(m))-e(\Psi(m+1)))+S_P\, e(\Psi(P+1))=$$

$$=\frac{T\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots,\frac{h_1}{q_1}\right)}{\varphi(Q)}\left\{\sum_{2\leqslant m\leqslant P}\operatorname{li}m\,(e(\Psi(m))-e(\Psi(m+1)))+\right.$$

$$\left.+\operatorname{li}Pe(\Psi(P+1))\right\}+O\left(Pe^{-c_3\sqrt{L}}\right),$$

так как

$$Pe^{-c_2\sqrt{L}}\left(\sum_{2\leqslant m\leqslant P}|e(\Psi(m))-e(\Psi(m+1))|+1\right)\ll$$

$$\ll Pe^{-c_2\sqrt{L}}L^{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k}\ll Pe^{-c_4\sqrt{L}}.$$

Далее,

$$\sum_{2\leqslant m\leqslant P}\operatorname{li}m\,(e(\Psi(m))-e(\Psi(m+1)))+\operatorname{li}Pe(\Psi(P+1))=$$

$$=\sum_{3\leqslant m\leqslant P}e(\Psi(m))\int_{m-1}^{m}\frac{dx}{\log x}=$$

$$=\sum_{3\leqslant m\leqslant P}\int_{m-1}^{m}\frac{e(\Psi(x))}{\log x}\,dx+O(L^{\sigma_1+\ldots+\sigma_k})=$$

$$=S^*(\beta_k,\ldots,\beta_1)+O(L^{\sigma_1+\ldots+\sigma_k}),$$

откуда вытекает наша лемма.

Лемма 10.5. Пусть $W=\min(1,|\beta_1\ldots\beta_k|^{-\alpha^2})$. Тогда

$$\int_{2/P}^{1}\frac{e(\Psi(y))}{\log yP}\,dy=\frac{1}{\log P}\int_{0}^{1}e(\Psi(y))\,dy+O\left(\frac{\log\log P}{(\log P)^2}W\right)$$

и, следовательно,

$$\int_{2/P}^{1}\frac{e(\Psi(y))}{\log yP}\,dy=O\left(\frac{W}{\log P}\right).$$

Доказательство. В силу второй теоремы о среднем значений и леммы 10.2, имеем

$$\frac{1}{L}\int_{0}^{1}e(\Psi(y))\,dy-\int_{2/P}^{1}\frac{e(\Psi(y))}{\log y+L}\,dy=$$

$$=\frac{1}{L}\int_{0}^{L^{-8}}e(\Psi(y))\,dy-\int_{2/P}^{L^{-8}}\frac{e(\Psi(y))}{\log y+L}\,dy+\int_{L^{-8}}^{1}\frac{\log y}{\log y+L}e(\Psi(y))\,dy=$$

$$=O(L^{-4(1-\alpha)}W)+O\left(\frac{\log L}{L^2}W\right)=$$

$$=(\log L\,WL^{-2}).$$

3) Лемма 10.6. На $\mathfrak{N}$

$$S(\alpha_k, \ldots, \alpha_1) = O(PL^{-s_1}).$$

Доказательство. Пусть α принадлежит m_k. Рассмотрим

$$S_0 = S\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_n}{q_n}, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1\right).$$

Пусть Q_n — общее наименьшее кратное чисел $q_k, \ldots, q_{n+1}$. Тогда $Q_n \ll L^{\sigma_k + \cdots + \sigma_{n+1}}$. По теореме 10, имеем

$$|S_0| \leqslant \sum_{t=1}^{Q_n} \left| \sum_{\substack{p \leq P \\ p \equiv t_i (Q_n)}} e\left(\frac{h_n}{q_n} p^n + \cdots + \alpha_1 p\right) \right| =$$

$$= O(PL^{-s_1 - \sigma_k - \cdots - \sigma_{n+1}}),$$

так как

$$\sigma_n \geqslant 2^{6k+1} (\sigma_k + \cdots + \sigma_{n+1} + s_1 + 1).$$

Пусть

$$S(m) = \sum_{p \leq m} e\left(\frac{h_k}{q_k} p^k + \cdots + \frac{h_n}{q_n} p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \cdots + \alpha_1 p\right).$$

Имеем тогда:

$$S(\alpha_k, \ldots, \alpha_1) = \sum_{m \leq P} (S(m) - S(m-1))\, e(\Psi(m)) =$$

$$= \sum S(m) \Big(e(\Psi(m)) - e(\Psi(m+1))\Big).$$

Таким образом,

$$S(\alpha_k, \ldots, \alpha_1) \ll PL^{-s_1 - \sigma_k - \cdots - \sigma_{n+1}} \sum_{m \leq P} \left(p^{-1} (L^{\sigma_k} + \cdots + L^{\sigma_{n+1}}) + p^{-1}\right) \ll$$

$$\ll PL^{-s_1}.$$

4) Для $k \geqslant 3$ в силу теоремы 16 и леммы 10.6, имеем

$$\int_{\mathfrak{N}} \cdots \int |S(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)|^s \, d\alpha_k \ldots d\alpha_1 \ll$$

$$\ll (PL^{-s_1})^{s - s_0 + 1} \int_{\mathfrak{N}} \cdots \int |S(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)|^{s_0 - 1} \, d\alpha_k \ldots d\alpha_1 \ll$$

$$\ll P^{s - \frac{1}{2} k(k+1)} L^{-s_1}.$$

Для $k=2$, в силу теоремы 5 (теоремы B_2'), имеем

$$\int\cdots\int_{\mathfrak{N}} |S(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)|^7 \, d\alpha_3 \, d\alpha_2 \, d\alpha_1 \ll PL^{-s_1} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 |S(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)|^6 \, d\alpha_3 \, d\alpha_2 \, d\alpha_1 \ll$$

$$\ll P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)} L^{-s_1+3}.$$

5) Лемма 10.7. При $t \geqslant k^2+1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} |S^*(\beta_k, \ldots, \beta_1)|^t \, d\beta_k \ldots d\beta_1 \ll P^{t-\frac{1}{2}k(k+1)} L^{-t}.$$

Доказательство. Интеграл слева есть

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_2^P \frac{e(\beta_k x^k + \cdots + \beta_1 x)}{\log x} \, dx \right|^t d\beta_k \ldots d\beta_1 .$$

Пусть $x = Py$, $\beta_\nu = \gamma_\nu P^\nu$, тогда этот интеграл равняется

$$P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)} \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{2/P}^1 \frac{e(\gamma_k y^k + \cdots + \gamma_1 y)}{\log yP} \, dy \right|^t d\gamma_k \ldots d\gamma_1 \ll$$

$$\ll P^{t-\frac{1}{2}k(k+1)} L^{-t} \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} W^t \, d\gamma_k \ldots d\gamma_1,$$

и наша лемма следует из леммы 10.5, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{2/P}^1 \frac{e(\gamma_k y^k + \cdots + \gamma_1 y)}{\log yP} \, dy \right|^t d\gamma_k \ldots d\gamma_1 = O(1).$$

Следовательно, интеграл

$$\int^{\infty} \gamma^{-ta^2} \, d\gamma$$

сходящийся.

6) Воспользуемся простым неравенством

$$|\xi^s - \eta^s| \leqslant s\,|\xi - \eta|\,(|\xi|^{s-1} + |\eta|^{s-1}).$$

В силу леммы 10.4, будем иметь

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int\cdots\int_{\mathfrak{M}} S^s(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\, e(-N_k\alpha_k - \cdots - N_1\alpha_1) \, d\alpha_k \ldots d\alpha_1 -$$

$$-\sum_{\mathfrak{M}} \left(\frac{T\left(\frac{h_k}{q_k}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right)}{\varphi(Q)} \right)^s e\left(-\frac{N_k h_k}{q_k} - \cdots - \frac{N_1 h_1}{q_1}\right) \int_{\mathfrak{M}} \cdots$$

$$\cdots\int\limits_{\mathfrak{M}} S^{*s}(\beta_k,\ldots,\beta_1)\, e(-N_k\beta_k-\cdots-N_1\beta_1)\, d\beta_k\ldots d\beta_1 \ll$$

$$\ll Pe^{-c_1\sqrt{L}}\left(\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 |S(\alpha_k,\ldots,\alpha_1)|^{s-1}\, d\alpha_k\ldots d\alpha_1 +\right.$$

$$\left.+\sum_q\sum_n Q^{-(s-1)a+\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}|S^*(\beta_k,\ldots,\beta_1)|^{s-1}\, d\beta_k\ldots d\beta_1\right) \ll$$

$$\ll P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}e^{-c_1\sqrt{L}},$$

потому что, согласно теореме 15,

$$\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 |S|^{s-1}\, d\alpha_k\ldots d\alpha_1 \ll P^{s-1-\frac{1}{2}k(k+1)},$$

а в силу леммы 10.7

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}|S^*|^{s-1}\, d\beta_k\ldots d\beta_1 \ll P^{s-1-\frac{1}{2}k(k+1)}$$

и

$$\sum_q\sum_h Q^{-(s-1)a} \leqslant \sum_q (q_1\ldots, q_n)^{1-(s-1)a^2} = O(L^{c_5})$$

(так как Q, общее наименьшее кратное $q_1,\ldots,q_k$, больше или равно, $\max(q_1,\ldots q_k) \geqslant (q_1,\ldots,q_k)^a$).

7) Мы имеем

$$\sum_{\mathfrak{M}}\left(\frac{T\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots\frac{h_1}{q_1}\right)}{\varphi(Q)}\right)^s e\left(-\frac{N_k h_k}{q_k}-\cdots-\frac{N_1h_1}{q_1}\right)\times$$

$$\times\int\cdots\cdots\int\limits_{\mathfrak{M}} S^{*s} e(-N_k\beta_k-\cdots-N_1\beta_1)\, d\beta_k\ldots d\beta_1 =$$

$$=\sum_{q_k\leqslant L^{\frac{1}{2}\sigma_k}}\ \sum_{q_1\leqslant L^{\frac{1}{2}\sigma_1}}\ \sum_{h_1}\cdots\sum_{h_k}\left(\frac{T\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots,\frac{h_1}{q_1}\right)}{\varphi(Q)}\right)^s e\left(-\frac{N_kh_k}{q_k}-\cdots-\frac{N_1h_1}{q_1}\right)\times$$

$$\times\int\cdots\int\limits_{\mathfrak{M}} S^{*s} e(-N_k\beta_k-\cdots-N_1\beta_1)\, d\beta_k\ldots d\beta_1 +$$

$$+O\left(\sum_{1\leqslant\nu\leqslant k}\ \sum_{q_k=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_{\nu+1}=1}^{\infty}\ \sum_{q_\nu\geqslant L^{\frac{1}{2}\sigma_\nu}}\ \sum_{q_{\nu-1}=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_1=1}^{\infty} q_1\ldots q_k\left(Q^{-a+\varepsilon}P\right)^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}\right).$$

При этом остаточный член

$$=O\left(\sum_{q_\nu \geq L^{\frac{1}{2}\sigma_\nu}} q_\nu^{1-\alpha^2 s+\varepsilon}\, P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}\right)=$$

$$=O\left(P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)} L^{\frac{1}{2}(2-\alpha^2 s)\sigma_\nu+\varepsilon}\right)=$$

$$=O\left(P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)} L^{-s-1}\right),$$

так как $\frac{1}{2}(s\alpha-2)\sigma_\nu > s+1$. Таким образом,

$$\sum_{\mathfrak{M}}\left(\frac{T}{\varphi(Q)}\right)^s e\left(-\frac{h_k}{q_k}N_k-\cdots-\frac{h_1}{q_1}N_1\right)\int\cdots\int_{\mathfrak{M}} S^{*s} e(-\beta_k N_k-\cdots-\beta_1 N_1)\,d\beta_k\ldots d\beta_1=$$

$$=\sum_{q_k\leq L^{\frac{1}{2}\sigma_k}}\cdots\sum_{q_1\leq L^{\frac{1}{2}\sigma_1}}\sum_{h_1}\cdots\sum_{h_k}\left(\frac{T}{\varphi(Q)}\right)^s e\left(-\frac{h_k}{q_k}N_k-\cdots-\frac{h_1}{q_1}N_1\right)\times$$

$$\times\int\cdots\int_{\mathfrak{M}} S^{*s} e(\beta_k N_k-\cdots-\beta_1 N_1)\,d\beta_k\ldots d\beta_1.$$

8) При $q_\nu \leq L^{\frac{1}{2}\sigma_1}$, $1\leq\nu\leq k$, имеем

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}-\int\cdots\int_{\mathfrak{M}}\right)|S^*|^s\,d\beta_1\ldots d\beta_k=$$

$$=O\left(\sum_{\nu=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}d\beta_k\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d\beta_{\nu-1}\int_{q_\nu^{-1}P^{-\nu}L^{\sigma_\nu}}^{\infty}d\beta_\nu\int_{-\infty}^{\infty}d\beta_{\nu+1}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|S^*|^s\,d\beta_1\right)\ll$$

$$\ll\sum_{\nu=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}d\gamma_k\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d\gamma_{\nu-1}\int_{q_\nu^{-1}L^{\sigma_\nu}}^{\infty}d\gamma_\nu\int_{-\infty}^{\infty}d\gamma_{\nu+1}\cdots$$

$$\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{2/P}^{1}\frac{e(\gamma_k y^k+\cdots+\gamma_1 y)}{\log Py}\,dy\right|^s P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}\,d\gamma_1\ll$$

$$\ll\sum_{\nu=1}^{k}\int_{L^{\frac{1}{2}\sigma_\nu}}^{\infty}\gamma_\nu^{-2s\alpha^2}\,d\gamma_\nu\cdot P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}\ll$$

$$\ll P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}L^{\frac{1}{2}\sigma_\nu(1-2s\alpha^2)}\ll$$

$$\ll P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}L^{-s-1},$$

так как

$$\frac{1}{2}\sigma_\nu(2a^2 s-1)>2s+1 \quad \text{для} \quad 1\leqslant\nu\leqslant k.$$

Поэтому

$$\sum_{\mathfrak{M}}\left(\frac{T\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots\frac{h_1}{q_1}\right)}{\varphi(Q)}\right)^s e\left(-\frac{h_k}{q_k}N_k-\cdots-\frac{h_1}{q_1}N_1\right)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathfrak{M}}\cdots\int S^{*s}(\beta_k,\ldots,\beta_1)\,e(-N_k\beta_k-\cdots-N_1\beta_1)\,d\beta_1\ldots d\beta_k=$$

$$=\sum_{q_k\leqslant L^{\frac{1}{2}\sigma_k}}\cdots\sum_{q_1\leqslant L^{\frac{1}{2}\sigma_1}}\sum_{h_k}\cdots\sum_{h_1}\left(\frac{T\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots,\frac{h_1}{q_1}\right)}{\varphi(Q)}\right)^s e\left(-\frac{h_k}{q_k}N_k-\cdots-\frac{h_1}{q_1}N_1\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}S^{*s}(\beta_k,\ldots,\beta_1)\,e(-\beta_k N_k-\cdots-\beta_1 N_1)\,d\beta_k\ldots d\beta_1+$$

$$+O\left(P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}L^{-s-1}\right).$$

9) Для $k\geqslant 3$ имеем

$$\mathfrak{S}(N_k,\ldots,N_1)-\sum_{q_k\leqslant L^{\frac{1}{2}\sigma_k}}\cdots\sum_{q_1\leqslant L^{\frac{1}{2}\sigma_1}}\sum_{h_k}\cdots$$

$$\cdots\sum_{h_1}\left(\frac{T\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots,\frac{h_1}{q_1}\right)}{\varphi(Q)}\right)^s e\left(-\frac{h_k}{q_k}N_k-\cdots-\frac{h_1}{q_1}N_1\right)\ll$$

$$\ll\sum_{\nu\leqslant k}\sum_{q_k=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_{\nu+1}=1}^{\infty}\sum_{q_\nu>L^{\frac{1}{2}\sigma_\nu}}\sum_{q_{\nu-1}=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_1=1}^{\infty}q_1\ldots q_k\,Q^{-sa+\varepsilon},$$

$$\ll\sum_{\nu\leqslant k}\sum_{q_\nu\geqslant L^{\frac{1}{2}\sigma_\nu}}q_\nu^{1-sa^2+\varepsilon}\ll L^{-1-s},$$

так как

$$\frac{1}{2}\sigma_\nu(sa^2-2)>1+s.$$

Для $k=2$ этот результат может быть получен методом пункта 5) в доказательстве теоремы 16.

Мы имеем поэтому

$$\sum_{\mathfrak{M}}\left(\frac{T\left(\frac{h_k}{q_k},\ldots,\frac{h_1}{q_1}\right)}{\varphi(Q)}\right)^s e\left(-\frac{h_k}{q_k}N_k-\cdots-\frac{h_1}{q_1}N_1\right)\times$$

$$\times\int\cdots\int_{\mathfrak{M}} S^{*s}e(-N_k\beta_k-\cdots-N_1\beta_1)\,d\beta_k\ldots d\beta_1=$$

$$=\mathfrak{S}(N_k,\ldots,N_1)\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-8}^{\infty}S^{*s}(\beta_k,\ldots,\beta_1)\,e(-\beta_kN_k-\cdots-\beta_1N_1)\,d\beta_k\cdots d\beta_1+$$

$$+O\left(P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}L^{-s-1}\right).$$

10) Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}S^{*s}(\beta_k,\ldots,\beta_1)\,e(-N_k\beta_k-\cdots-N_1\beta_1)\,d\beta_k\cdots d\beta_1=$$

$$=P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots$$

$$\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{2/P}^{1}\frac{e(\gamma_kx^k+\cdots+\gamma_1x)}{\log xP}\,dx\right)^s e\left(-\frac{N_k}{P^k}\gamma_k-\cdots-\frac{N_1}{P}\gamma_1\right)d\gamma_k\cdots d\gamma_1.$$

В силу леммы 10.5,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{2/P}^{1}\frac{e(\gamma_kx^k+\cdots+\gamma_1x)}{\log xP}\,dx\right)^s e\left(-\frac{N_k}{P^k}\gamma_k-\cdots-\frac{N_1}{P}\gamma_1\right)d\gamma_k\ldots d\gamma_1=$$

$$=\frac{1}{(\log P)^s}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots$$

$$\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{1}e(\gamma_kx^k+\cdots+\gamma_1x_1)\,dx\right)^s e\left(-\frac{N_k}{P^k}\gamma_k-\cdots-\frac{N_1}{P_1}\gamma_1\right)d\gamma_k\ldots d\gamma_1+$$

$$+O\left(\frac{\log L}{L^{s+1}}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\overline{W}^{s-1}d\gamma_k\ldots d\gamma_1=$$

$$=\frac{b_1}{L^s}+O\left(\frac{\log L}{L^{s+1}}\right).$$

Окончательно имеем

$$\sum_{\mathfrak{M}}\int_{\mathfrak{M}}S^s(\alpha_k,\ldots,\alpha_1)\,e(-\alpha_kN_k-\cdots-\alpha_1N_1)\,d\alpha_k\ldots d\alpha_1=$$

$$=b_1\,\mathfrak{S}(N_k,\ldots,N_1)\frac{P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}}{L^s}+O\left(\frac{P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)}}{L^{s+1}}\log L\right),$$

где

$$b_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_0^1 e(\gamma_k x^k+\cdots+\gamma_1 x)\,dx\right)^s e\left(-\frac{N_k}{P^k}\gamma_k-\cdots-\frac{N_1}{P}\gamma_1\right)d\gamma_k\ldots d\gamma_1.$$

Таким образом получаем нашу теорему.

Если $b_1\geqslant b>0$ и $\mathfrak{S}(N_k,\ldots,N_1)\geqslant c>0$ (где b и c не зависят от постоянных N), то при достаточно больших N система диофантовых уравнений с простыми неизвестными

$$\sum_{\nu=1}^{s} p_\nu^{\mu}=N_\mu,\quad 1\leqslant\mu\leqslant k,$$

разрешима. Ограничения, налагаемые на b_1 и $\mathfrak{S}$, не всегда выполняются. Условие $b_1\geqslant b>0$ назовем „условием порядка", а $\mathfrak{S}\geqslant c>0$ — „условием сравнимости".

6. Условие, налагаемое на константу

$$b_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_0^1 e(\gamma_k x^k+\cdots+\gamma_1 x)\,dx\right)^s e(-\gamma_k-\delta_{k-1}\gamma_{k-1}-\cdots-\delta_1\gamma_1)\,d\gamma\ldots d\gamma_1$$

(условие порядка).

Пусть

$$B(\omega_k,\ldots,\omega_1)=$$

$$=\int\limits_{-\omega_k}^{\omega_k}d\gamma_k\cdots\int\limits_{-\omega_1}^{\omega_1}\left(\int\limits_0^1 e(\gamma_k x^k+\cdots+\gamma_1 x)\,dx\right)^s e(-\gamma_k-\delta_{k-1}\gamma_{k-1}-\cdots-\delta_1\gamma_1)\,d\gamma_1.$$

Тогда, по определению,

$$b_1=\lim_{\omega_k\to\infty}\ldots\lim_{\omega_1\to\infty}B(\omega_k,\ldots,\omega_1).$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$B(\omega)=B(\omega_k,\ldots,\omega_1)=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 dx_1\ldots dx_s\int\limits_{-\omega_k}^{\omega_k}\cdots$$

$$\cdots\int\limits_{-\omega_1}^{\omega_1} e(\gamma_k(x_1^k+\cdots+x_s^k-1)+\cdots+\gamma_1(x_1+\cdots+x_s-\delta_1))\,d\gamma_k\cdots d\gamma_1=$$

$$=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\frac{\sin 2\pi\omega_k(x_1^k+\cdots+x_s^k-1)}{x_1^k+\cdots+x_s^k-1}\cdots\frac{\sin 2\pi\omega_1(x_1+\cdots+x_s-\delta_1)}{x_1+\cdots+x_s-\delta_1}\,dx_1\cdots dx_s.$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \cdots + x_s - \delta_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_k &= x_1^k + \cdots + x_s^k - 1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Тогда

$$J = \frac{D(x_1, \ldots, x_k)}{D(X_1, \ldots X_k)} = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} 1, \ldots, 1 \\ x_1, \ldots, x_k \\ \cdots\cdots \\ x_1^{k-1}, \ldots, x_k^{k-1} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{k! \prod\limits_{\substack{i>j \\ i,j \leqslant k}} (x_i - x_j)}.$$

Разделим область $0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant x_s \leqslant 1$ на части D_j, в каждой из которых преобразование (1) взаимно однозначно, а J не меняет знака. Тогда

$$B(\omega) = \sum_j \int \cdots \int_{D_j} \frac{\sin 2\pi\omega_1 X_1}{X_1} \cdots \frac{\sin 2\pi\omega_k X_k}{X_k} \, dX_1 \ldots$$

$$\ldots dX_k \underset{\substack{0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \\ \cdots\cdots \\ 0 \leqslant x_k \leqslant 1}}{\int_0^1} \cdots \int_0^1 \frac{dx_{k+1} \ldots dx_s}{k! \, \pi \, |x_i - x_j|}.$$

Отсюда, по теореме Дирихле,

$$\lim_{\omega \to \infty} B(\omega) = \underset{\substack{0 \leqslant x_\nu \leqslant 1 \\ X_\mu = 0}}{\int_0^1} \cdots \int_0^1 \frac{dx_{k+1} \ldots dx_s}{k! \, \pi \, |x_i - x_j|} > 0, \qquad (2)$$

если только система уравнений

$$X_\mu = x_1^\mu + \cdots + x_s^\mu - \delta_\mu = 0, \qquad 1 \leqslant \mu \leqslant k, \qquad (3)$$

имеет в рассматриваемой области действительное решение.

Дадим теперь условие разрешимости системы (3).

Лемма 10.7. Пусть $s \geqslant k$. Чтобы система уравнений

$$x_1^h + \cdots + x_s^h = \delta_k \quad 1 \leqslant h \leqslant k, \quad 0 \leqslant x_\nu \leqslant 1, \quad \delta_k = 1 \qquad (1)$$

была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы существовали вещественные числа $\delta_{k+1}, \ldots, \delta_s$ такие, что

а) главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} \delta_0 \ \delta_1 \ldots \delta_{s-1} \\ \delta_1 \ \delta_2 \ldots \delta_s \\ \cdots\cdots \\ \delta_{s-1} \ \delta_s \ldots \delta_{2(s-1)} \end{pmatrix}$$

неотрицательны; здесь $\delta_0 = s$, а δ_ν $(\nu > s)$ заданы рекуррентной формулой:

$$\begin{vmatrix} \delta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_s & \delta_{s-1} & \delta_{s-2} & \dots & s \\ \delta_\nu & \delta_{\nu-1} & \delta_{\nu-2} & \dots & \delta_{\nu-s} \end{vmatrix}$$

b) главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_s & \delta_{s-1} & \delta_{s-2} & \dots & \delta_1 \end{pmatrix}$$

неотрицательны, и если равен нулю ее ν-й главный минор, то и ее $(\nu+1)$-й главный минор тоже равен нулю (т. е. матрица „с нулевым хвостом").

Доказательство. Необходимость.

1a) Пусть $R_\nu = t_0 + t_1 x_\nu + \cdots + t_{s-1} x_\nu^{s-1}$.

Так как

$$\sum_{\nu=1}^{s} R_\nu^2 = \sum_{i,j=0}^{s-1} \delta_{i+j} t_i t_j \qquad \left(\delta_h = \sum_{x=1}^{s} x_\nu^h\right) \tag{2}$$

есть положительно-определенная или полуопределенная форма, то, согласно хорошо известной теореме о матрицах, получаем условие a).

1b) Пусть σ_ν — ν-я элементарная симметрическая функция от $x_1, \dots, x_s$. Тогда

$$\frac{1}{\nu!}\begin{vmatrix} \delta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_\nu & \delta_{\nu-1} & \delta_{\nu-2} & \dots & \delta_1 \end{vmatrix} = \sigma_\nu \geqslant 0.$$

2) Достаточность. Очевидно, существуют s чисел $x_1, \dots, x_s$ действительных или комплексных, таких, что

$$x_1^h + \cdots + x_s^h = \delta_h \quad (1 \leqslant h \leqslant s).$$

2a) Числа x вещественны. Пусть x_ν' $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$, всевозможные различные числа из x и x_ν', встречаются среди x e_ν раз. Предположим, что

$$\begin{aligned} x'_{2m-1} &= y_{2m-1} + iy_{2m}, \\ x'_{2m} &= y_{2m-1} - iy_{2m}, \qquad y_{2m} \neq 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant m \leqslant g \end{aligned}$$

и

$$x_\nu' = y_\nu \quad \text{при} \quad 2g < m \leqslant n,$$

где y вещественны. Пусть $R_{2m-1} = P_{2m-1} + iP_{2m}$ и $R_{2m} = P_{2m-1} - iP_{2m}$. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно $t_0, \ldots, t_{s-1}$.

$$\left.\begin{array}{ll} P_\nu = 0 & \text{при } 3 \leqslant \nu \leqslant 2g, \\ R_\nu = 0 & \text{при } 2g \leqslant \nu \leqslant n, \\ 2P_1 = P_2. & \end{array}\right\} \tag{3}$$

Мы покажем, что (3) имеет решение $t_0, \ldots, t_{s-1}$, причем все t равны нулю, и $P_1 \neq 0$. Существование решения системы (3) очевидно. Допустим, что все решения (3) таковы, что $P_1 = 0$. Тогда P_1 зависит линейно от $R_\nu (3 \leqslant \nu \leqslant g)$; следовательно, R_1 зависит линейно от $R_\nu (2 \leqslant \nu \leqslant g)$. А это противоречит тому, что все x' различны.

Пусть $t_0, \ldots, t_{s-1}$ — решение системы (3) такое, что $P_1 \neq 0$. Тогда

$$\sum_{\nu=1}^{s} R_\nu^2 = e_1((P_1 + iP_2)^2 + (P_i - iP_2)^2) =$$

$$= 2e_1(P_1^2 - P_2^2) = -6e_1 P_1^2 < 0.$$

Это противоречит предположению a), следовательно, форма (2) не может быть неопределенной.

2b) Числа x положительны. Условие b) утверждает, что $\sigma_\nu > 0$, и наше утверждение получается непосредственно из правила знаков Декарта.

2c) В силу 2b) и того, что $\delta_k = 1$, утверждение получается непосредственно.

Следующее достаточное условие более удобно для применения.

Лемма 10.8. Пусть $s \geqslant k$. Система уравнений

$$x_1^h + \cdots + x_s^h = \delta_h, \quad 1 \leqslant h \leqslant k, \quad 0 \leqslant x_\nu \leqslant 1, \quad \delta_k = 1$$

разрешима, если

a) главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} \delta_0 & \delta_1 \ldots \delta_{k-1} \\ \delta_1 & \delta_2 \ldots \delta_k \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \delta_{k-1} & \delta_k \ldots \delta_{2(k-2)} \end{pmatrix}$$

неотрицательны; здесь $\delta_0 = k$, а $\delta_\nu\ (\nu > k)$ задаются рекуррентной формулой:

$$\begin{vmatrix} \delta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_k & \delta_{k-1} & \delta_{k-2} & \dots & k \\ \delta_\nu & \delta_{\nu-1} & \delta_{\nu-2} & \dots & \delta_{\nu-k} \end{vmatrix} = 0,$$

b) главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_k & \delta_{k-1} & \delta_{k-2} & \dots & \delta_1 \end{pmatrix}$$

положительны.

Доказательство. Эту лемму мы можем получить из леммы 10.7. Положим

$$x_{k+1} = \dots = x_s = 0.$$

ГЛАВА XI

Дальнейшее рассмотрение проблемы главы X

1.

Как следствие теоремы 17 получается, что система диофантовых уравнений

$$p_1^k + \cdots + p_s^k = N_k,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p_1 + \cdots + p_s = N_1$$

разрешима при достаточно больших целых N, если выполнено некоторое „условие порядка" и

$$\mathfrak{S}(N_k, \ldots, N_1) > 0,$$

причем $s \geqslant 4.14k(k+1)(k+2)\log k$.

Теперь мы пойдем дальше, именно — будет показано, что эта система диофантовых уравнений разрешима при определенных условиях порядка, если

$$\mathfrak{S}(N_k, \ldots, N_1) > 0$$

и

$$s \geqslant 2k^2 + 3 + k\log(23.2k^7(\log 2k)^2)/\log\frac{1}{1-a}\,(\sim 7k^2\log k \text{ для больших } k).$$

В дальнейшей части главы мы изучим условия, при которых $\mathfrak{S}(N_k, \ldots, N_1) > 0$.

2.

Лемма 11.1. Пусть

$$(2\nu - 1)Q \leqslant x_\nu \leqslant 2\nu Q, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant k.$$

Тогда число систем целых чисел $x_1, \ldots, x_k$ таких, что

$$x_1^h + \cdots + x_k^h \quad 1 \leqslant h \leqslant k,$$

лежат в интервалах, соответственно, длины $\leqslant Q^{h-1}(1 \leqslant h \leqslant k)$, будет $\ll 1$.

Метод доказательства леммы 5.1 может быть без существенных изменений применен к этой лемме.

Лемма 11.2. Пусть R_k — число решений системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} x_{ij}^{h} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} x_{ij}'^{h} \quad 1\leqslant h\leqslant k, \tag{1}$$

где

$$(2i-1)P^{(1-a)^{j-1}}\leqslant x_{ij},\ x_{ij}'\leqslant 2iP^{(1-a)^{j-1}}. \tag{2}$$

Тогда

$$R_k\leqslant P^{\left(2k^2-\frac{1}{2}k(k+1)\right)(1-(1-a)^n)}.$$

Доказательство. Из (1) и (2) легко выводим

$$\sum_{i=1}^{k} x_{i1}^{h}-\sum_{i=1}^{k} x_{i1}'^{h}=O(P^{h(1-a)}). \qquad 1\leqslant h\leqslant k.$$

Тогда, при фиксированном x_{i1}' $(i=1,\ldots,k)$,

$$\sum_{i=1}^{k} x_{i1}^{k},\ \sum_{i=1}^{k} x_{i1}^{k-1},\ldots,\ \sum_{i=1}^{k} x_{i1}$$

лежат в интервалах, соответственно, длины

$$O(P^{k(1-a)}),\ \ O(P^{(k-1)(1-a)}),\ldots,\ O(P^{1-a}). \tag{3}$$

Так как система интервалов (3) может быть разбита на

$$O\left(\frac{P^{k(1-a)}}{P^{k-1}}\frac{P^{(k-1)(1-a)}}{P^{k-2}}\cdots\frac{P^{2(1-a)}}{P}\frac{P^{1-a}}{1}\right)=O\left(P^{k-\frac{1}{2}(k+1)}\right)$$

систем интервалов длины

$$O(P^{k-1}),\ O(P^{k-2}),\ldots,\ O(P),\ O(1),$$

то, в силу леммы 11.1 (при $Q=P$), число систем значений x_{i1} $(1\leqslant i\leqslant k)$, есть $\ll P^{k-\frac{1}{2}(k+1)}$. Поэтому число систем x_{i1} и x_{i1}' $(i=1,\ldots,k)$ есть

$$O\left(P^{2k-\frac{1}{2}(k+1)}\right).$$

Далее, при фиксированных x_{ij}, x'_{ij}, $(1\leqslant i\leqslant k,\ \ 1\leqslant j\leqslant l-1)$ и $x'_{i,l}$ $(1\leqslant i\leqslant k)$, согласно (1) и (2),

$$\sum_{i=1}^{k} x_{il}^{k},\ \sum_{i=1}^{k} x_{il}^{k-1},\ldots,\ \sum_{i=1}^{k} x_{il}$$

лежат в интервалах, соответственно, длины

$$O(P^{k(1-a)^l}),\ O(P^{(k-1)(1-a)^l}), \ldots, O(P^{(1-a)^l}).$$

Так как

$$O\left(\frac{P^{k(1-a)^l}}{P^{(k-1)(1-a)^{l-1}}}\,\frac{P^{(k-1)(1-a)^l}}{P^{(k-2)(1-a)^{l-1}}}\cdots\frac{P^{(1-a)^l}}{1}\right)=O\left(P^{\left(k-\frac{1}{2}(k+1)\right)(1-a)^{l-1}}\right),$$

то, в силу леммы 11.1 $\left(\text{при } Q=P^{(1-a)^{l-1}}\right)$, число систем $x_{il}\,(1\leqslant i\leqslant k)$ есть

$$O\left(P^{\left(k-\frac{1}{2}(k+1)\right)(1-a)^{l-1}}\right).$$

Поэтому, при фиксированных x_{ij}, x_{ij}', $(1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant l-1)$, число систем x_{il} и x_{il}' есть

$$O\left(P^{\left(2k-\frac{1}{2}(k+1)\right)(1-a)^{l-1}}\right).$$

Таким образом, полное число решений системы уравнений (1) при ограничении (2) есть

$$O\left(P^{\left(2k-\frac{1}{2}(k+1)\right)(1+(1-a)+\ldots+(1-a)^{n-1})}\right)=$$

$$=O\left(P^{\left(2k^2-\frac{1}{2}(k+1)k\right)(1-(1-a)^n)}\right).$$

3.

Пусть

$$S_0=\sum_{n\leqslant 2P} e(\alpha_k n^k+\cdots+\alpha_1),$$

$$S_{ij}(\alpha_k,\ldots,\alpha_1)=\sum_{(2i-1)P^{(1-a)^{j-1}}\leqslant n\leqslant 2iP^{(1-a)^{j-1}}} e(\alpha_k n^k+\cdots+\alpha_1 n),$$

$$1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

Лемма 11.3. Пусть $t=k^2+1$, тогда для

$$n=\left[\frac{\log(23.2k^7(\log 2k)^2)}{-\log(1-a)}\right]+1$$

имеем

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 |S_0|^{2t}\left|\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} S_{ij}\right|^2 d\alpha_k\ldots d\alpha_1\ll P^{2t+2k^2(1-(1-a)^n)-\frac{1}{2}k(k+1)}.$$

Доказательство. Мы разбиваем область интегрирования так же, как это делалось в доказательстве теоремы 16.

Так как $t \geqslant k^2+1$, то

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int \cdots \int_{\mathfrak{M}} |S_0|^{2t} \, d\alpha_k \ldots d\alpha_1 \ll P^{2t-\frac{1}{2}k(k+1)}$$

(доказывается так же, как теорема 16). Поэтому

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int \cdots \int_{\mathfrak{M}} |S_0|^{2t} \left| \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} S_{ij} \right|^2 d\alpha_k \ldots d\alpha_1 \ll P^{2t+2k^2(1-(1-a)^n)-\frac{1}{2}k(k+1)}.$$

Возьмем

$$n = \left[\frac{7 \log k + 2 \log \log 2k + \log 23.2}{-\log(1-a)} \right] + 1.$$

Так как $S_0 \ll P^{1-\lambda}$, $\lambda = \frac{1}{23.2 k^7 (\log 2k)^2}$, то

$$\frac{k(k+1)}{2\lambda}(1-a)^n < \frac{k(k+1)}{2} \times 23.2 k^7 (\log 2k)^2 (1-a)^n <$$

$$< \frac{k(k+1)}{2} < 2t.$$

Следовательно, в силу леммы 11.2,

$$\int \cdots \int_{\mathfrak{N}} |S_0|^{2t} \left| \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} S_{ij} \right|^2 d\alpha_k \ldots d\alpha_1 \ll$$

$$\ll P^{2t(1-\lambda)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} S_{ij} \right|^2 d\alpha_k \ldots d\alpha_1 \ll$$

$$\ll P^{2t-2t\lambda+\left(2k^2-\frac{1}{2}k(k+1)\right)(1-(1-a)^n)} \ll P^{2t+2k^2(1-(1-a)^n)-\frac{1}{2}k(k+1)}.$$

4.

Соответственно определяем

$$\gamma_0(\alpha_k, \ldots, \alpha_1) = \sum_{p \leqslant 2P} e(\alpha_k p^k + \ldots + \alpha_1 p),$$

$$\gamma_{ij}(\alpha_k, \ldots, \alpha_1) = \sum_{(2i-1)P(1-a)^{j-1} \leqslant p \leqslant 2iP(1-a)^{j-1}} e(\alpha_k p^k + \cdots + \alpha_1 p),$$

$1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Пусть $t = \left[\frac{1}{2}(k^2+3)\right]$ и

$$\mathfrak{Q} = \gamma_0^{2t+1} \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \gamma_{ij}^2 = \sum I'(N_k, \ldots, N_1)\, e(N_k \alpha_k + \cdots + N_1 \alpha_1),$$

где $I'(N_k, \ldots, N_1)$ означает число решений системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^h + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}'^h + \sum_{\nu=1}^{2l+1} p_\nu''^h = N_h, \quad 1 \leqslant h \leqslant k,$$

$$(2i-1)\,P^{(1-a)^{j-1}} \leqslant p_{ij}, \quad p'_{ij} \leqslant 2iP^{(1-a)^{j-1}}, \quad 1 \leqslant p''_\nu \leqslant 2kP,$$

где $2kP = N_k^a$.

Лемма 11.4.

$$I'(N_k, \ldots, N_1) = \frac{b_1 P^{2l+1+2k^2(1-(1-a)^n)-\frac{1}{2}k(k+1)}\mathfrak{S}(N_k, \ldots N_1)}{L^{2l+1+2kn}}\left(1 + O\left(\frac{\log L}{L}\right)\right),$$

где

$$b_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\left(\int_0^1 e(\gamma_k x^k + \ldots + \gamma_1 x)\,dx\right)^{2l+1} \prod_{\nu=1}^{k}\left(\int_{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)a}^{\nu a} e(\gamma_k x^k + \ldots + \gamma_1 x)\,dx\right)^2 e\left(-\frac{N_k}{(2kP)^k}\gamma_k - \ldots - \frac{N_1}{2kP}\gamma_1\right)\right\} \times$$

$$\times\, d\gamma_1 \ldots d\gamma_k.$$

Доказательство. Имеем

$$I'(N_k, \ldots, N_1) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \gamma_0^{2l+1} \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} \gamma_{ij}^2\, e(-N_k\alpha_k - \cdots - N_1\alpha_1)\,d\alpha_k \ldots d\alpha_1.$$

Разобьем область интегрирования так же, как в доказательстве теоремы 17. В силу леммы 10.3,

$$\int \cdots \int_{\mathfrak{N}} \left|\gamma_0^{2l+1} \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} \gamma_{ij}^2\right| d\alpha_k \ldots d\alpha_1 \leqslant$$

$$\leqslant PL^{-\varepsilon_1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\gamma_0|^{2l} \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} |\gamma_{ij}|^2\, d\alpha_k \ldots d\alpha_1 \leqslant$$

$$\leqslant P^{2l+1+2k^2(1-(1-a)^n)-\frac{1}{2}k(k+1)} L^{-\varepsilon_1}.$$

Так же как в теореме 17, имеем

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} \gamma_0^{2l+1} \prod_{i=1}^{k} \gamma_{i1}^2\, e(-N_k\alpha_k - \cdots - N_1\alpha_1)\,d\alpha_k \ldots d\alpha_1 =$$

$$= b_2'\,\mathfrak{S}(N)\,P^{2l+2k+1-\frac{1}{2}k(k+1)} L^{-2l-2k-1}\left(1 + O\left(\frac{\log L}{L}\right)\right),$$

где

$$b_2' = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_0^1 e(\gamma_k x^k + \cdots + \gamma_1 x)\, dx \right)^{2t+1} \prod_{\nu=1}^{k} \left(\int\limits_{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)a}^{\nu a} e(\gamma_k x^k + \cdots + \gamma_1 x)\, dx \right)^2 \times$$

$$\times\, e\left(-\frac{N_k}{(2kP)^k} \gamma_k - \cdots - \frac{N_1}{2kP} \gamma_1 \right) d\gamma_k \ldots d\gamma_1.$$

Далее, легко получить требуемую лемму, применяя тот же метод, что в лемме 9.6.

5. Особые ряды

Мы употребляем символ $\sum\limits_{x}^{q}$ для обозначения суммы, когда переменное x пробегает полную систему вычетов по модулю q, а $\sum\limits_{x}^{q}{}'$ — для обозначения суммы при x, пробегающем приведенную систему вычетов по модулю q. Имеем

$$\mathfrak{S}(N_k, \ldots, N_1) = \sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_k=1}^{\infty} A(q_k, \ldots, q_1),$$

$$A(q_k, \ldots, q_1) = \sum_{h_1}^{q_1}{}' \cdots \sum_{h_k}^{q_k}{}' T^s e\left(-\frac{h_k}{q_k} N_k - \cdots - \frac{h_1}{q_1} N_1 \right),$$

$$T = \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{x}^{Q}{}' e\left(\frac{h_k}{q_k} x^k + \cdots + \frac{h_1}{q_1} x \right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(q_1 \ldots q_k)} \sum_{x}^{q_1 \ldots q_k} e\left(\frac{h_k}{q_k} x^k + \cdots + \frac{h_1}{q_1} x \right),$$

где Q — общее наименьшее кратное чисел $q_k, \ldots, q_1$.

Пусть $W(m)$ обозначает число решений системы сравнений

$$\left.\begin{array}{l} h_1^k + \cdots + h_s^k \equiv N_k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_1 + \cdots + h_s \equiv N_1 \end{array}\right\} \pmod{m},$$

$$1 \leqslant h_\nu \leqslant m, \quad (h_\nu, m) = 1, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant s.$$

Лемма 11.5.

$$\sum_{q_k/p^l} \cdots \sum_{q_1/p^l} A(q_k, \ldots, q_1) = p^{lk} \varphi^{-s}(p^l)\, W(p^l).$$

Доказательство. Имеем

$$W(p^l) = \frac{1}{p^{lk}} \sum_{x_1=1}^{p^l}{}' \cdots \sum_{x_s=1}^{p^l}{}' \sum_{h_1=1}^{p^l} \cdots$$

$$\cdots \sum_{h_k=1}^{p^l} e_{p^l}(h_k(x_1^k + \cdots + x_s^k - N_k) + \cdots + h_1(x_1 + \cdots + x_s - N_1)) =$$

$$= \frac{1}{p^{lk}} \varphi^s(p^l) \sum_{h_1=1}^{p^l} \cdots \sum_{h_k=1}^{p^l} \left(\frac{\sum_x^{p^l}{}' e_{p^l}(h_k x^k + \cdots + h_1 x)}{\varphi(p^l)} \right)^s e_{p^l}(-h_k N_k - \cdots - h_1 N_1) =$$

$$= \frac{1}{p^{lk}} \varphi^s(p^l) \sum_{q/p_k^l} \cdots \sum_{q_1/p^l} A(q_k, \ldots, q_1).$$

Лемма 11.6. Если $(m_1, m_2) = 1$, то

$$W(m_1 m_2) = W(m_1)\, W(m_2).$$

Очевидно.

Лемма 11.7.

$$\sum_{q_1/p_1^l \ldots p_l^l} \cdots \sum_{q_k/p_1^l \ldots p_l^l} A(q_k, \ldots, q_1) = \prod_{\nu=1}^{l} \left(\sum_{q_1/p_\nu^l} \cdots \sum_{q_k/p_\nu^l} A(q_k, \ldots, q_1) \right)$$

и

$$\mathfrak{S}(N_k, \ldots, N_1) = \lim_{l \to \infty} \prod_{\nu=1}^{l} \left(\sum_{q_1/p_\nu^l} \cdots \sum_{q_k/p_\nu^l} A(q_k, \ldots, q_1) \right),$$

где $p_1, p_2, \ldots$ суть простые числа в их естественном порядке.

Доказательство. Эта лемма есть следствие лемм 11.5 и 11.6, так как

$$|\mathfrak{S}(N_k, \ldots, N_1)| \leqslant \sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_k=1}^{\infty} |A(q_k, \ldots, q_1)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_k=1}^{\infty} (q_1 \ldots q_k)\,(Q^{-a+\varepsilon})^s \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_k=1}^{\infty} (q_1 \ldots q_k)^{1-a^2 s+\varepsilon},$$

так что, при $s \geqslant 2k^2+1$,[1] $\mathfrak{S}$ сходится абсолютно.

Лемма 11.8. При $s \geqslant 2k^2+1$

$$\sum_{q_1/p^l} \cdots \sum_{q_k/p^l} A(q_k, \ldots, q_1) \geqslant 1 - C(k) p^{-1-\alpha^2+\varepsilon}.$$

Доказательство. Так как

$$A(q_k, \ldots, q_1) \ll q_1 \ldots q_k Q^{-as+\varepsilon} \ll (q_1 \ldots q_k)^{1-\alpha^2 s+\varepsilon},$$

то

$$\sum_{q_1/p^l} \cdots \sum_{q_k/p^l} A(q_k, \ldots, q_1) = 1 + O\left(\sum_{q_1/p^l} \cdots \sum_{q_k/p^l} (q_1 \ldots q_k)^{1-\alpha^2 s} - 1\right) =$$

$$= 1 + O\left(\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{1-\alpha^2 s+\varepsilon}}}\right)^k - 1\right) =$$

$$= 1 + O(p^{1-\alpha^2 s+\varepsilon}).$$

Пусть

$$D = \begin{vmatrix} k^{k-1}, & \ldots, & 2^{k-1}, & 1^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k, & \ldots, & 2, & 1 \\ 1, & \ldots, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

и $p^\Theta \| D$. Итак, при $p \geqslant k$ имеем $\Theta = 0$. Пусть

$$p^{\Theta_\nu} \| \nu, \quad \nu = p^{\Theta_\nu} \nu_0, \quad \Theta_0 = \max(\Theta_1, \ldots, \Theta_k).$$

Пусть $W_1(p^l)$ означает число решений системы сравнений

$$\left.\begin{array}{l} y_1^k + \cdots + y_s^k \equiv N_k \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_1 + \cdots + y_s \equiv N_1 \end{array}\right\} (\operatorname{mod} p^l), \quad p \nmid y,$$

в которой

$$1 \leqslant y_\nu \leqslant p^l, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant k, \quad 1 \leqslant y_\mu \leqslant p^{l-\Theta-\Theta_0}, \quad k+1 \leqslant \mu \leqslant s,$$

и

$$p^{\Theta} \| \begin{vmatrix} y^{-1}, & \ldots, & y_1^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_k, & \ldots, & y_1 \\ 1, & \ldots, & 1 \end{vmatrix}.$$

[1] Эту границу можно улучшить, если воспользоваться равенством

$$Q = \frac{q_1 \cdots q_k}{(q_2 \ldots q\ , \ldots, q_1 \ldots q_{k-1})}.$$

Лемма 11.9. Система сравнений

$$\sum_{\beta=1}^{k} a_{\alpha\beta} x_{\beta} \equiv b_{\alpha} \pmod{p^{l}},\ 1 \leqslant \alpha \leqslant k,$$

$$p^{\lambda} \| \begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{1,k} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k,1}, \dots, a_{k,k} \end{vmatrix}$$

разрешима, если

$$p^{\lambda} \left| \begin{vmatrix} b_1\ a_{12} \dots a_{1k} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_k\ a_{k2} \dots a_{kk} \end{vmatrix} \right., \dots, p^{\lambda} \left| \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k-1}\ b_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1} \dots a_{kk-1}\ b_k \end{vmatrix} \right..$$

Доказательство. Лемма доказывается классическим методом детерминантов.

Лемма 11.10. При $p > k$ и $s > (k+1)p$ имеем $W_1(p) \geqslant 1$.

Доказательство. Так как система сравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1(k+1)^{\nu} + x_2 k^{\nu} + x_3(k-1)^{\nu} + \dots + x_{k+1} 1^{\nu} &\equiv N_{\nu} \pmod{p},\ 1 \leqslant \nu \leqslant k \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1} &\equiv s \pmod{p} \end{aligned} \right\}$$

разрешима при $0 < x_{\nu} \leqslant p$, то можно выбрать такое x_{k+1}, что

$$x_1 + \dots + x_{k+1} = s.$$

Лемма 11.11. Система сравнений

$$x_1^{\nu} + \dots + x_s^{\nu} \equiv N_{\nu} \pmod{p}, \quad p \nmid x, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant k,$$

разрешима при $s > 2k$ и $p > \sqrt{2k} \cdot (k!)^{\frac{s}{2(s-2k)}}$.

Доказательство. Число M рассматриваемой системы сравнений, очевидно, равно

$$\frac{1}{p^k} \sum_{a_1=1}^{p} \dots \sum_{a_k=1}^{p} \left(\sum_{x=1}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p}(a_k x^k + \dots + a_1 x)} \right)^s e^{-\frac{2\pi i}{p}(a_k N_k + \dots + a_1 N_1)}.$$

Тогда

$$|M - p^{s-k}| \leqslant \frac{1}{p^k} \sum_{a_1=1}^{p} \dots \sum_{a_k=1}^{p}{}^{*} \left| \sum_{x=1}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p}(a_k x^k + \dots + a_1 x)} \right|^s,$$

где $*$ означает условие, что p не делит все a. В силу формул (2) и (3), п. 3, главы I, имеем

$$|M-p^{s-k}|\leqslant\frac{1}{p^k}\left((2k\cdot k!)^{\frac{1}{2k}}p^{1-a}\right)^{s-2k}k!\,p^{2k}\leqslant$$

$$\leqslant(2k\cdot k!)^{\frac{1}{2}(s-2k)}k!\,p^{s-k-a(s-2k)}<$$

$$<p^{s-k},$$

так как

$$(2k\cdot k!)^{\frac{1}{2k}(s-2k)}k!\,p^{-a(s-2k)}<1.$$

Поэтому

$$M\geqslant p^{s-k}-(p^{s-k}-1)=1,$$

и мы получаем нашу лемму.

Лемма 11.12. При $s>3k$ и $p>\sqrt{2k}\cdot(k!)^{\frac{s}{2(s-2k)}}$ имеем $W_1(p)\geqslant 1$.

Доказательство. В силу леммы 11.11, система сравнений

$$x_1^{\nu}+\cdots+x_t^{\nu}\equiv N_\nu-1^\nu-2^\nu-\cdots-k^\nu,\ 1\leqslant\nu\leqslant k,$$

разрешима при $t>2k$, $p>\sqrt{2k}\,(k!)^{\frac{s}{2(s-2k)}}$, и мы получаем нашу лемму.

Лемма 11.13. При $l\geqslant 2\Theta+2\Theta_0+1$ имеем

$$W_1(p^{l+1})\geqslant p^{s-k}\,W_1(p^l).$$

Следовательно, для всякого положительного целого числа

$$W_1(p^{l+u})\geqslant p^{u(s-k)}\,W_1(p^l).$$

Доказательство. Мы предполагаем, что

$$\sum_{u=1}^{s}y^\nu\equiv N_\nu\ (\mathrm{mod}\,p^l),\tag{1}$$

$$1\leqslant y_\lambda\leqslant p^l \text{ для } 1\leqslant\lambda\leqslant k,\ 1\leqslant y_\tau\leqslant p^{l-\Theta-\Theta_0},\ k+1\leqslant\tau\leqslant s.$$

Пусть $h_\mu=y_\mu+z_\mu p^{l-\Theta_0-\Theta}$. Тогда

$$h_\mu^\nu\equiv y_\mu^\nu+\nu y_\mu^{\nu-1}z_\mu p^{l-\Theta_0-\Theta}\ \ (\mathrm{mod}\,p^{2(l-\Theta_0-\Theta)}),$$

$$\sum_{\mu=1}^{s}h_\mu^\nu=\sum_{\mu=1}^{s}y_\mu^\nu+\nu\sum_{\mu=1}^{s}y_\mu^{\nu-1}z_\mu p^{l-\Theta_0-\Theta}\,(\mathrm{mod}\,p^{l+1}).\tag{2}$$

Рассмотрим теперь систему сравнений

$$\sum_{\mu=1}^{s}\nu_0 y_\mu^{\nu-1}z_\mu\equiv\frac{N_\nu-\sum\limits_{\mu=1}^{s}y_\mu^\nu}{p^{l-\Theta_0-\Theta-\Theta_\nu}}\ \ (\mathrm{mod}\,p^{\Theta_0+\Theta+1}).\tag{3}$$

Если условия (2) и (3) выполняются, то

$$\sum_{\mu=1}^{s} h'^{\nu}_{\mu} \equiv N_\nu \pmod{p^{l+1}}. \tag{4}$$

Так как

$$p^\theta \parallel \begin{vmatrix} y_1^{k-1}, \ldots, y_k^{k-1} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ y_1^0, \ldots, y_k^0 \end{vmatrix} \cdot k_0 (k-1)_0 \ldots 1_0$$

и

$$p^\theta \mid p^{\theta_0+\theta-\theta_\nu} \mid \frac{N_\nu - \sum\limits_{\mu=1}^{s} y_\mu^{\nu}}{p^{l-\theta_0-\theta+\theta_\nu}},$$

то система (3) разрешима при любых z_τ $(k+1 \leqslant r \leqslant s)$. Поэтому

$$W_1(p^{l+1}) \geqslant p^{s-k} W_1(p^l).$$

Теорема 18. Если $s > 2(k+1)\sqrt{k \cdot k!}$ и

$$W_1(p^{2\theta+2\theta_0+1}) \geqslant 1$$

для всех $p \leqslant k$, то $\mathfrak{S}(N_k, \ldots, N_1)$ больше или равна некоторой положительной константе, не зависящей от чисел N.

Доказательство. Возьмем в лемме 11.8 $\varepsilon = \frac{a^2}{3}$. Тогда для $p \geqslant (C(k))^{3k^2}$ получим

$$\sum_{q_1 \mid p^l} \cdots \sum_{q_k \mid p^l} A(q_k, \ldots, q_1) > 1 - p^{-1-\frac{a^2}{3}}.$$

Далее, в силу лемм 11.5, 11.3 и 11.12,

$$\sum_{q_1 \mid p^l} \cdots \sum_{q_k \mid p^l} A(q_k, \ldots, q_1) \geqslant p^{-m(s-k)}.$$

Согласно лемме 11.7, получаем наше утверждение.

Замечание. Легко доказать, что, если $s > 3k$ и

$$W_1(p^{2\theta+2\theta_0+1}) \geqslant 1$$

для всех $p \leqslant \sqrt{2k}\,(k!)^{\frac{3}{2}}$, то $\mathfrak{S}(N_k, \ldots, N_1) \geqslant \text{const} > 0$.

ГЛАВА XII

Отдельные результаты

1.

В этой главе мы установим некоторые результаты и проблемы, которые могут быть получены или решены методом, изложенным в настоящем мемуаре. Проблемы эти, по их природе, могут быть разбиты на следующие четыре категории:

a) проблема, включающая понятия „почти все" и „с положительной плотностью";

b) проблема, порождаемая гипотезой, что для всякого заданного целого числа $N(>0)$ существует целое число A такое, что квадратный многочлен

$$x^2-x+A$$

принимает простые значения при $x=0, 1, \ldots, N$;

c) обобщенная проблема одновременного представления чисел суммами многочленов;

d) результаты, получаемые в предположении, что система уравнений
$$x_1^h+\cdots+x_{\frac{1}{2}k(k+1)}^h=y_1^h+\cdots+y_{\frac{1}{2}(k+1)}^h,\quad 1\leqslant h\leqslant k,\quad 1\leqslant x,\quad y\leqslant P$$
имеет $\ll c_1(k)\,P^{\frac{1}{2}k(k+1)}(\log P)^{c_2(k)}$ решений.

Некоторые результаты, не входящие в эти категории, будут даны в п. 6 этой главы.

2.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество различных натуральных чисел, $M(x)$ — число элементов множества $\mathfrak{M}$, не превосходящих x. Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество множества $\mathfrak{M}$, а $N(x)$ означает число элементов $\mathfrak{N}$, не превосходящих x. Если

$$\lim_{x=\infty}\frac{N(x)}{M(x)}=1,$$

то говорят, что $\mathfrak{N}$ содержит почти все элементы $\mathfrak{M}$. В частности, если $\mathfrak{M}$ содержит все целые числа $\equiv l \pmod q$, то говорят, что $\mathfrak{N}$ содержит почти все целые числа $\equiv l \pmod q$.

Далее, если

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} \geqslant \alpha > 0,$$

то говорят, что $\mathfrak{M}$ имеет положительную асимптотическую плотность.

Пусть $h(k)$ означает наименьшее целое число s такое, что множество целых чисел, представимых в виде суммы s k-ых степеней простых чисел, содержит почти все целые числа $\equiv s \pmod k$, где k определено в главе VIII. Тогда мы можем доказать, что

$$h(1)=2,\ h(2)=3,\ h(3)\leqslant 5,\ h(4)\leqslant 8,\ h(5)\leqslant 13,\ h(6)\leqslant 20,\ h(7)\leqslant 28$$

и

$$h(k)\leqslant k+m+4,$$

где m имеет то же значение, что в п. 1 главы IX.

Пусть $f_\nu(x)$ суть s_0 многочленов с целыми значениями k-ой степени, а s_0 задается табличкой:

k	1	2	3	4	5	6	7	$\geqslant 8$
s_0	2	3	5	8	13	20	28	$k+m+4$

Тогда множество целых чисел, представимых в виде $f(p_1)+\ldots+f(p_s)$, имеет положительную асимптотическую плотность.

3. Формулировка одной гипотезы

Для всякого заданного $N(>0)$ существует целое число A такое, что

$$x^2-x+A$$

принимает простые значения при $x=0, 1, \ldots, N$. Следующие данные подтверждают эту гипотезу: x^2-x+41 принимает простые значения при $0\leqslant x\leqslant 40$; выражения

$$x^2-x+19421,\quad x^2-x+27941,\quad x^2-x+72491$$

весьма богаты простыми значениями (последнее принимает простые значения при $0\leqslant x\leqslant 11000$).[1]

---

[1] Beeger, N. G. W. H., Report on some calculations of prime numbers, Nieuw. Arch. Wiskde, 20, 40—50 (1939).

Другими словами, система $N+1$ уравнений относительно $N+2$ неизвестных $p_m (0 \leqslant m \leqslant N)$ и A

$$m^2 - m + A = p_m, \quad 0 \leqslant m \leqslant N,$$

разрешима. Исключая A, получаем

$$m^2 - m = p_m - p_0, \quad 1 \leqslant m \leqslant N,$$

т. е. систему N линейных уравнений с $N+1$ простыми неизвестными. Подсказывается следующая, более общая, проблема: разрешима ли система N линейных уравнений с $N+1$ простыми неизвестными

$$\sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} p_j = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N? \tag{1}$$

Проблема эта должна, повидимому, решаться в положительном смысле при некоторых условиях „порядка" и „сравнимости". Но сейчас решение такой проблемы лежит вне возможностей математики. Тем не менее можно доказать, что система (1) разрешима для почти всех b, удовлетворяющих определенным условиям „сравнимости".

Более того, система уравнений

$$\sum_{j=1}^{2N+1} a_{ij} p_j = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

разрешима при больших b, если выполняются определенные условия порядка и сравнимости.

Наконец, этот тип проблем включает, как частные случаи, следующие интересные проблемы:

I) Гипотеза Гольдбаха: уравнение

$$p_1 + p_2 = 2n$$

разрешимо при всяком $n > 1$ (частный случай общей проблемы при $N = 1$).

II) Проблема „близнецов": уравнение

$$p_1 - p_2 = 2$$

имеет бесконечно много решений.

III) Проблема простых троек: системы уравнений

$$p_1 - p_2 = 2, \quad p_2 - p_4 = 4,$$

или

$$p_1 - p_2 = 4, \quad p_2 - p_3 = 2$$

имеют бесконечно много решений.

IV) Хорошо известно, что множество целочисленных точек, лежащих на прямой $ax+b$, $(a,b)=1$, $x=1,2,\ldots$, содержит бесконечно много простых чисел. Содержит ли множество целочисленных точек на плоскости

$$(ax+by+c, \quad a'x+b'y+c')$$

бесконечно много пар простых чисел (p_1, p_2)?

4. Метод, использованный в главах X и XI, применим и к более общей проблеме

Пусть $\{f_{1,i}(x), \ldots, f_{s,i}(x)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ — k систем, каждая из s линейно-независимых многочленов с целыми значениями. Разрешима ли следующая система диофантовых уравнений?

$$f_{11}(p_1)+\cdots+f_{1s}(p_s)=N_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{k_1}(p_1)+\cdots+f_{k_s}(p_s)=N_k.$$

Решение проблемы нетрудно при s большем границы, указанной в главах X и XI. Единственный пункт доказательства, который стоит отметить, — неравенство

$$\int\cdots\int|g_1\ldots g_s|\,d\alpha_1\ldots d\alpha_k \leqslant \left(\prod_{\nu=1}^{s}\int\cdots\int|g_\nu|^s\,d\alpha_1\ldots d\alpha_k\right)^{\frac{1}{s}}.$$

5. Формулировка гипотезы

Система диофантовых уравнений

$$x_1^h+\ldots+x^h_{\frac{1}{2}k(k+1)}=y_1^h+\ldots+y^h_{\frac{1}{2}k(k+1)}, \quad 1\leqslant h\leqslant k, \ 1\leqslant x, y\leqslant P,$$

имеет $\ll c_1(k)P^{\frac{1}{2}k(k+1)}(\log P)^{c_2(k)}$ решений.

Гипотеза, очевидно, оправдывается для $k=1$, а для $k=2$ она доказана в главе IV. Вопрос, верна ли она для $k\geqslant 2$, остается открытым. Если она верна, то почти все результаты этого мемуара могут быть улучшены, именно — асимптотическая формула для числа решений верна тогда для $s>\frac{1}{2}k(k+1)$, и $H(k)\leqslant s_0\sim 2k\log k$, $h(k)\leqslant s_1\sim k\log k$. Разумеется, эта гипотеза имеет еще много приложений в аналитической теории чисел.

6. В заключение этой главы мы сформулируем еще несколько других результатов

I. Всякое большое целое число есть сумма простого и s k-ых степеней простых чисел, где $s \geqslant s_0 \sim 3k \log k$.

II. Всякое большое целое число есть сумма простого и s k-ых степеней целых чисел где $s \geqslant s_0 \sim 2k \log k$.

III. Всякое большое целое число есть сумма s k-ых степеней целых чисел, содержащих не более двух простых множителей, где $s \geqslant s_0 \sim 4k \log k$.

Дальнейшие следствия из теоремы Виноградова о среднем значении

В приложении мы докажем одну лемму и сформулируем различные ее следствия.

Лемма. Пусть

$$f(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_0 \quad k \geqslant 0,$$

— многочлен k-ой степени с действительными коэффициентами, а P — целое положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$2k\,|\alpha_k|\,P \leqslant 1.$$

Тогда

$$\sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(x)} = O\left(k^2 P^{1-\frac{A}{k^3 \log k}}\right) + O\left(|\alpha_k|^{-\frac{1}{k-1}}\right),$$

где A и константа в символе O — абсолютные константы. Более точно, при $k \geqslant 14$ первый член может быть заменен членом

$$O(k^2 P^{1-\varphi}), \quad \varphi = \frac{1}{k^3(\log k + 1 \cdot 1 \log\log k^2)}.$$

Доказательство (ср. доказательство леммы 5.5 в тех же обозначениях, за исключением выбора p_1). Пусть

$$S = \sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(x)}.$$

Тогда

$$|S| \leqslant \frac{1}{p_1}\left(P^{b'n-1} \sum_{y=1}^{P} |S_1|^{b'n}\right)^{\frac{1}{b'n}} + p_1.$$

Предположим, что $p_1 \geqslant (n-1)^{k(1-a)^{1-n}} = C$. Тогда

$$\sum_{y=1}^{P} |S_1|^{bn} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{N_1}^{b'np_1} \cdots \sum_{N_k}^{b'np_1^{k-1}} \Psi^2(N_1, \ldots, N_{k-1}) \sum_{N_1}^{b'np_1} \cdots \sum_{N_{k-1}}^{b'np_1^{k-1}} \left|\sum_y e(A_{k-1}N_{k-1} + \ldots + A_1 N_1)\right|^2}.$$

Далее, согласно замечанию к теореме 7,

$$\sum_{N_1}^{b'np_1} \cdots \sum_{N_k}^{b'np_1^{k-1}} \Psi^2(N_1, \ldots, N_{k-1}) \leqslant (ck^2)^{2b'n} p_1^{2b'n - \frac{1}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}k(k-1)\sigma'}$$

и

$$\sum_{N_1}^{b'np_1} \cdots \sum_{N_k}^{b'np_1^{k-1}} \left| \sum_{y} e(A_{k-1} N_{k-1} + \cdots + A_1 N_1) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (2b'n)^{k-1} p_1^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)} \sum_{y_1=1}^{P} \sum_{y_2=1}^{P} \min\left(b'np_1^{k-1}, \frac{1}{\{k\alpha_k(y_1-y_2)\}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant (2b'n)^{k-1} p_1^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)} P \sum_{Y=-P}^{P} \min\left(b'np_1^{k-1}, \frac{1}{\{k\alpha_k N\}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant (2b'n)^{k-1} p_1^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)} P \left(b'np_1^{k-1} + 2\sum_{Y=1}^{P} \frac{1}{b\,|\alpha_k|\,Y} \right) \leqslant$$

$\left(\text{так как } |Y| \leqslant P \text{ и } |k\alpha_k Y| \leqslant \frac{1}{2}\right)$

$$\leqslant (2b'n)^k p_1^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)} P \left(p_1^{k-1} + \frac{1}{k\,|\alpha_k|} \log P \right).$$

Поэтому

$$S \ll k^2 P \left(P^{-1} p_1^{\frac{1}{2}k(k-1)\sigma'} \left(1 + \frac{p_1^{1-k} \log P}{k\,|\alpha_k|} \right) \right)^{\frac{1}{2b'n}} + p_1.$$

Если $|\alpha_k|^{-\frac{1}{k-1}} \geqslant P$, то теорема тривиальна.

Предположим теперь, что $P \geqslant |\alpha_k|^{-\frac{1}{k-1}}$. Беря $p_1 = |\alpha_k|^{-\frac{1}{k-1}}$, будем иметь

$$S \ll k^2 P \left(p^{-1+\frac{1}{2}k(k-1)\sigma'} \left(1 + \frac{\log P}{k} \right) \right)^{\frac{1}{2b'n}} + |\alpha_k|^{-\frac{1}{k-1}},$$

если только

$$|\alpha_k|^{-\frac{1}{k-1}} \geqslant C.$$

Теперь лемма получается точно таким же образом, как утверждение леммы 5.5.

Если $|\alpha_k|^{-\frac{1}{k-1}} \leqslant C$, но $P^{1-\rho} \geqslant C$, то мы берем $p_1 = P^{1-\rho}$ и имеет место тот же результат.

Если $P^{1-\rho} < C$, то имеем тривиальным образом

$$|S| \leqslant P = P^{1-\rho} P^{\rho} \leqslant C^{\frac{\rho}{1-\rho}} P^{1-\rho} \ll P^{1-\rho},$$

так как $\frac{\rho}{1-\rho} \leqslant 1$.

Эта лемма имеет фундаментальное значение в аналитической теории чисел, теории римановой ζ-функции и т. п. Сейчас мы дадим некоторые ее приложения, которые могут быть доказаны известным методом без каких бы то ни было существенных изменений:

1) $\zeta(1+it) = O\left((\log t)^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right)$.[1]

2) $\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O\left(xe^{-A(\log x)^{\frac{4}{7}-\varepsilon}}\right)$.[2]

3) Область приложимости формулы средних значений

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\, dt = \sum_1^{\infty} d_k^2(n)\, n^{-2\sigma}.$$[3]

4) Пусть $A(x)$ — число целых точек внутри эллипсоида

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} x_i x_j \leqslant x \qquad (a_{ij} = a_{ji} \text{ — целые числа}).$$

Пусть D — детерминант этой формы. Тогда

$$A(x) - \frac{\pi^2}{2\sqrt{D}} x^2 = O\left(x \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} x\right).$$[4]

---

[1] Tichmarsh, Quarterly Journ., 9 (1938), 106—107.

[2] Чудаков, Доклады Академии Наук СССР, XXI (1938), 421—422; Titchmarsh, там же.

[3] Davenport, Journ. of London Math. Soc., 10 (1935), 136—138.

[4] Walfisz, Travaux de l'Institut Mathématique de Tbilisi, 5 (1938), 181—196.

LOO-KENG HUA

The additive prime number theory

SUMMARY

In the following we shall summarize the results chapter by chapter: It is established in the I chapter that
Let

$$f(x)=a_k x^k+\cdots+a_1 x+a_0$$

be a polynomial with integer coefficients and $(a_k,\ldots,a_1)=1$, and

$$S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q} e_q(f(x)), \quad e_q(x)=e^{2\pi i x/q}.$$

Then

$$\left|\sum_{x=1}^{m} e_q(f(x))-\frac{m}{q}S(q,f(x))\right|\leqslant c(k,\varepsilon)\,q^{1-\alpha+\varepsilon}, \qquad \alpha=\frac{1}{k},$$

where ε any positive number and $c(k,\varepsilon)$ constant depending on k and ε but not on the coefficients of $f(x)$.

In chapter II, we establish that

Let $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ be a polynomial of the k-th degree with integer coefficients. Suppose that the coefficients are relatively prime. Then

$$\sum_{\substack{x_1=1\\ f(x_1,\ldots,x_n)\neq 0,}}^{P}\cdots\sum_{x_n=1}^{P} d^l(|f(x_1,\ldots,x_n)|)\leqslant c_1(k,n,l)\,A(\log X)^{c_2(k,n,l)}$$

where X denotes the maximum value of $|f(x_1,\ldots,x_n)|$ for $1\leqslant x_\nu\leqslant P$ and

$$A=\max\left(P^n, X^{\frac{n}{k}}\right).$$

Notice that c_1 and c_2 are independent of the coefficients of f.

Chapter III contains a proof of the theorem.

Let $f(x)$ be an integral-valued polynomial of the degree, and

$$T(\alpha)=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)\alpha}.$$

Then, for $1\leqslant \nu\leqslant k$,

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^\nu} d\alpha \leqslant c_1(k,\nu,\text{coefficients of } f(x))\, P^{2^\nu-\nu}(\log P)^{c_2(k,\nu)}.$$

In chapter IV, we proved

Theorem B_k. Let P be an integer >0 and

$$c_k=\sum_{x=1}^{P} e(\alpha_k x^k+\ldots+\alpha_1 x), \quad e(x)=e^{2\pi i x}.$$

Then

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |c_k|^{\lambda} d\alpha_1\ldots d\alpha_k \leqslant c_1(k,\varepsilon)\, P^{\lambda-\frac{1}{2}k(k+1)+\varepsilon},$$

where $\lambda=\lambda(k)$ is defined by the following table:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	6	16	46	124	312	760	1778	4068	9190

Moreover, for $k=2$ we have a more pricise result

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\sum_{x=1}^{P} e(\alpha_2 x^2)+\alpha_1 x)\right|^6 d\alpha_1\, d\alpha_2 \leqslant b_1 P^3(\log P)^3.$$

The proof of the theorem is intermoven with the proof of the following

Theorem A_k. Let

$$f(x)=a_0 x^k+a_1 x^{k-1}+\ldots,$$

where a_0 is a positive integer $\leqslant b_2(k)$ and a_1 is an integer $\leqslant b_3(k)P$. Let

$$S_k=\sum_{x=1}^{P} e(\alpha_k f(x)+\alpha_{k-2}x^{k-2}+\ldots+\alpha_1 x).$$

Then we have

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 |S_k|^{\lambda} d\alpha_1\ldots d\alpha_{k-2}\,d\alpha_k \leqslant c_2(k,\varepsilon)\, P^{\lambda-\frac{1}{2}(k^2-k+2)+\varepsilon},$$

where $\lambda = \lambda(k)$ is defined by the following table:

k	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	10	32	86	220	536	1272	2930	6628

Vinogradow's mean-value theorem is proved in chapter V which is the keystone of the recent developments of the analytic theory of numbers. The proof given here seems to be simpler.

Let

$$f(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_1 x$$

and

$$c_k = \sum_{x=1}^{P} e(f(x)).$$

Then, for $b = b(k) = 2b_1 = 2\left[\frac{1}{4}(k+1)(k+2)\right]$ and $k \leqslant n \leqslant c_1(k)$, we have

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |c_k|^{bn} \, d\alpha_1 \, \ldots d\alpha_k \leqslant c_1(k) P^{bn - \frac{1}{2}k(k+1) + \frac{1}{2}k(k+1)\sigma},$$

where $\sigma = (1-a)^n$, $a = \frac{1}{k}$.

The theorem may be stated alternatively in the following form.

The number of solutions of the system of diophantine equations

$$\sum_{\nu=1}^{b_1 n} x_\nu^h = \sum_{\nu=1}^{b_1 n} y_\nu^h, \quad 1 \leqslant h \leqslant k, \quad 1 \leqslant x,\ y \leqslant P$$

is $\leqslant c_2(k) P^{bn - \frac{1}{2}k(k+1) + \frac{1}{2}k(k+1)\sigma}$.

The object of chapter VI is to prove the following theorem which is essentially due to Vinogradow with certain modifications which are indispensable for the simultaneous problem.

Let $L = \log P$. Let $0 < Q \leqslant c_1(k) L^{\sigma_1}$ and

$$S = \sum_{\substack{p \leqslant P \\ p \equiv t \pmod{Q}}} e(f(p))$$

where $f(x) = \frac{h}{q} x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \cdots + \alpha_k$, α's are real numbers, $(h, q) = 1$ and $L^\sigma < q \leqslant P^k L^{-\sigma}$. For any given $\sigma_0 > 0$, we have

$$|S| \leqslant c_2(k) P L^{-\sigma_0} Q^{-1}$$

provided that

$$\sigma \geqslant 2^{6k}(\sigma_0+\sigma_1+1).$$

The contents of the chapter VII is the following:

Let $f(x)$ be an integral-valued polynomial of the k-th degree with positive first coefficeint. Suppose that there does not exist an integer q such that $f(x) \equiv f(0) \pmod q$ for all integers x. The asymptotic formula for the number of solutions of

$$f(p_1)+\cdots+f(p_s)=N,$$

where the p's are primes, is established for

$$\begin{cases} r^k+1 & \text{for } 1 \leqslant k < 14, \\ k^3(\log k + 2 \cdot 2 \log\log k), & \text{for } k \geqslant 14. \end{cases}$$

Chapter VIII studies singular series.

In chapter IX, we prove that every sufficiently large integer $N \equiv s \pmod K$ is a sum of s k-th power of primes, provided $s \geqslant s_0$, where $s_0 = s_0(k)$ is defined by the following table:

k	4	5	6	7	in general
s_0	15	25	39	55	$2k+2m+7$

Here

$$m = \left[\frac{\log \frac{1}{2} b + \log(1-2a)}{-\log(1-a)} \right],$$

$$a = \frac{1}{k}, \quad b = \begin{cases} k^3(\log k + 1.1 \log\log k), & \text{for } k \geqslant 14, \\ r^{k-1} & , \ \text{for } k \leqslant 14 \end{cases}$$

and K is an integer depending only on k explicitely given in the text.

It is the object of the chapter X and chapter XI to consider the following system of Diophantine equations

$$\begin{gathered} p_1^k+\cdots+p_s^k=N_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1+\cdots+p_s=N_1, \end{gathered}$$

where the p's are prime. In chapter X, we establish the asymptotic formula for the number of solutions of the system provided $s \geqslant s_0$, where s_0 is given by the following table:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_0	7	19	49	127	315	763	1781	4071	9193	$4 \cdot 14k(k+1)(k+2)\log k$

In chapter XI the solvability of the system is discused under the condition $s > s_0 (\sim 7k^2 \log k)$.

Chapter XII stated some results and problems which may be proved or solved by the method given in the memoir.

The appendix contains a consequence of Vinogradow's mean-value theorem. The possible applications to the theory of ζ-functions, distribution of primes and lattice point theory are enumerated.

ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
17	4 сн.	$\sum_{q''/q} q^{l'-1\,a+\varepsilon} \leqslant$	$\sum_{q''/q} q^{l'-1+a+\varepsilon} \leqslant$
	8 св.	$\left\lvert \sum_{1}^{q} e_q \right.$	$\left\lvert \sum_{x=1}^{q} e_q \right.$
27	3 и 4 св.	$f(x_2)) =$	$f(x_2))) =$
32	4 сн.	$= a_0\, x_k +$	$= a_0\, x^k +$
72	3 св.	$\sum'_{<s\leqslant M}$	$\sum'_{0<s\leqslant M}$
81	6 св.	$\equiv t\,(\mathrm{mod}\; Q$	$\equiv t\,(\mathrm{mod}\; Q)$
	14 св.	$\ll \frac{p_1}{p_2}$	$\ll \frac{P_1}{p_2}$
89	1 сн.	$\ll p^{2l-k}$	$\ll P^{2t-k}$
97	5 сн.	Теорема 11.	Теорема 11'.
113	2 св.	$i + 0, \ldots$	$i = 0, \ldots$
120	8 св.	$+ f'(x_4) =$	$+ f(x_4') =$
125	5 св.	$\overline{11\,896\,378\,130\,987}\,.$	$\overline{11\,896\,378\,130\,937}$
161	7 сн.	$\sum_{x}^{q_1 \ldots q_k}$	$\sum_{x}^{q_1 \ldots q_k}{}'$
167	10 сн.	$+ g^{h}_{\frac{1}{2}}\,(k+1)$	$+ y^{h}_{\frac{1}{2}k(k+1}$